Robust and Optimal Control, Spring 2015

Instructor: Prof. Masayuki Fujita (S5-303B)

R: Flexible Beam: Mixed Sensitivity

Reference:

M. Fujita, F. Matsumura and M. Shimizu,
H_∞ Robust Control Design for a Magnetic Suspension System,
2nd International Symposium on Magnetic Bearing, 349-356,
July 12-14, 1990, Tokyo, Japan.

柔軟ビーム磁気浮上システム

Real Physical System

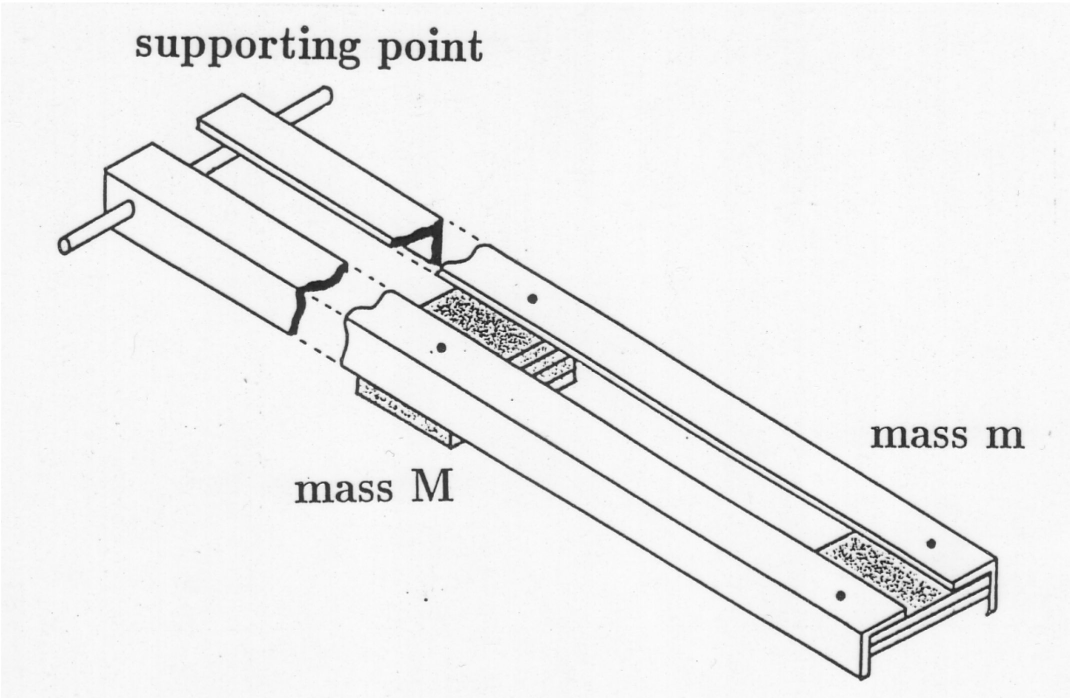


図2 柔軟ビーム

Ideal Physical Model

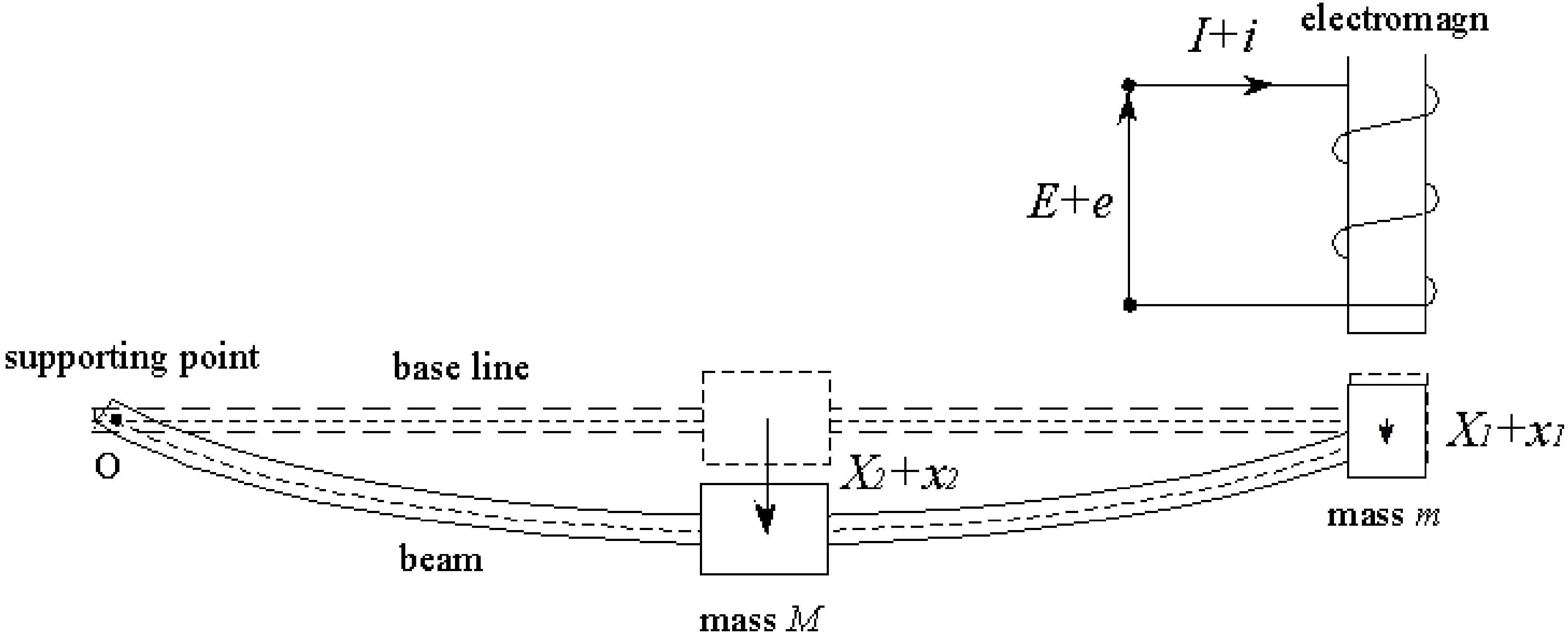


図3　柔軟ビーム磁気浮上系

モデリングのための仮定

1. 磁気飽和, ヒステリシスがない.
2. うず電流は無視できる.
3. もれ磁束がない.
4. 鉄心の透磁率は無限大である.
5. 2 質量 m, M からなる集中定数系として近似する.
6. インダクタンスは一定, 速度起電力の項は無視.

パラメータ

MATLAB program

```
m = 5.8 ;
M = 10.36 ;
X1 = 5e-3 ;
X2 = 12.3e-3 ;
R = 57 ;
L = 3.16;
I = 0.885
gg = 9.8
```

パラメータ	記号	値	単位
ビームの長さ	$2l$	3.8	m
質量	m	5.8	kg
質量	M	10.36	kg
定常ギャップ	X_1	5.0	mm
ビームのたわみ	X_2	12.3	mm
固有振動数	f_n	4.5	Hz
電磁石抵抗	R	57	Ω
電磁石インダクタンス	L	3.16	H
定常電流	I	0.885	A
重力加速度	g	9.8	m/s^2

H_∞ 制御系設計(混合感度)

Ideal Mathematical Model

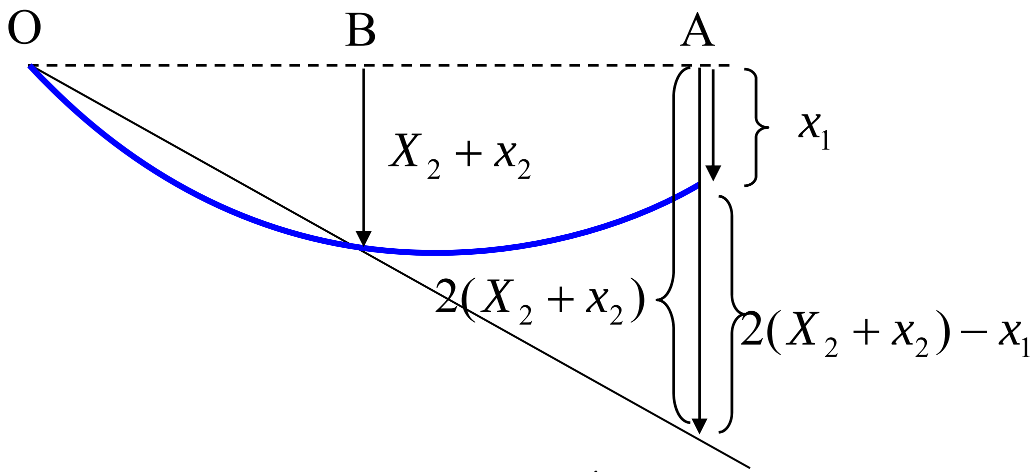


図4 数式モデル

柔軟ビーム

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = mg - f_{mag} + f_{beam}$$

$$M\frac{d^2x_2}{dt^2} = Mg - 2f_{beam}$$

$$f_{mag} = k\left(\frac{I+i}{X_1+x_1}\right)^2, \qquad f_{beam} = \alpha(2(X_2+x_2)-x_1) + \beta\frac{d}{dt}(2(X_2+x_2)-x_1)$$

電磁石

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e$$

$k = 0.0034$ [Nm^2 / A^2]

$\alpha = 2064$ [N/m]

$\beta = 0.327$ [Ns/m]

MATLAB program

```
k = 0.0034;
alpha = 2064;
beta = 0.327
```

Reduced Mathematical Model

線形化

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \left(\frac{M+2m}{X_1}g - \alpha\right)x_1 + 2\alpha x_2 - \frac{(M+2m)g}{I}i - \beta\frac{dx_1}{dt} + 2\beta\frac{dx_2}{dt}$$

$$M\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2\alpha x_1 - 4\alpha x_2 + 2\beta\frac{dx_1}{dt} - 4\beta\frac{dx_2}{dt}$$

出力

$$y_p = x_1$$

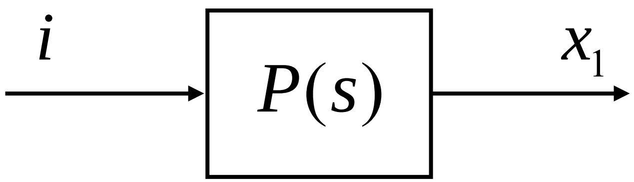


図5　柔軟ビーム磁気浮上系

状態空間表現

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \\ y = C_p x_p \end{cases}$$

$$x_p := [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad i]^T \qquad u := e$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & -\beta/m & 2\beta/m & c \\ d & f & 2\beta/M & -4\beta/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix} \qquad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix} \qquad C_p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$a := \frac{1}{m}\left(\frac{M+2m}{X_1} g - \alpha\right), \quad b := \frac{2\alpha}{m}, \quad c := -\frac{M+2m}{mI} g,$$

$$d := \frac{2\alpha}{M}, \quad f := -\frac{4\alpha}{M}, \quad h := -\frac{R}{L}, \quad j := \frac{1}{L}$$

＊ ○は修正箇所

MATLAB program

```
Ma = ( ( ( M+2*m )/X1 )*gg – alpha ) / m ;
Mb = 2*alpha / m ;
Mc = -( ( M+2*m ) / ( m*I ) )*gg ;
Md = 2*alpha / M ;
Mf = -4*alpha / M ;
Mh = -R / L ;
Mj = 1 / L ;

Ap = [ 0    0      1       0      0  ;
       0    0      0       1      0  ;
       Ma   Mb    -beta    2*beta  Mc ;
       Md   Mf    2*beta  -4*beta  0  ;
       0    0      0       0      Mh ]
Bp = [ 0; 0; 0; 0; Mj ]
Cp = [ 1  0  0  0  0 ]
Dp = 0
```

可制御性，可観測性

$$CO = \begin{bmatrix} B_p & A_p B_p & A_p^2 B_p & A_p^3 B_p & A_p^4 B_p \end{bmatrix}$$

$$OB = \begin{bmatrix} C_p & C_p A_p & C_p A_p^2 & C_p A_p^3 & C_p A_p^4 \end{bmatrix}'$$

$$\mathrm{rank}(CO) = 5$$

$$\mathrm{rank}(OB) = 5$$

制御対象は，可制御，可観測である

MATLAB program

```
CO = ctrb(Ap,Bp);
CO_rank = rank(CO)
OB = obsv(Ap,Cp);
OB_rank = rank(OB)
```

伝達関数表現

$$P(s) = C_g (sI - A_g)^{-1} B_g$$

$$P(s) = \frac{-13.3(s + 0.654 \pm j28.2)}{(s+84.4)\underbrace{(s-84.1)}_{\text{不安定極}}(s+18.0)\underbrace{(s+0.697 \pm j28.8)}_{\text{振動モード}}}$$

5 次の線形時不変系（LTI システム）であり，不安定系・振動系

極

$84.1,$

$-0.697 \pm j28.8$

$-18.0,$

$-84.4,$

零点

$-0.654 \pm j28.2$

MATLAB program

```
P_ss = ss ( Ap, Bp, Cp, Dp ) ;
[ P_num, P_den ] = ss2tf ( Ap, Bp, Cp, Dp ) ;
P_tf = tf ( P_num, P_den ) ;
zpk( P_tf )

P_pole = pole ( P_ss )
P_zero = zero ( P_ss )
```

MATLAB program

```
omega1=logspace(-3,3,150);
bode ( P_ss, omega1 ) ;
Pzmap (P_ss)
```

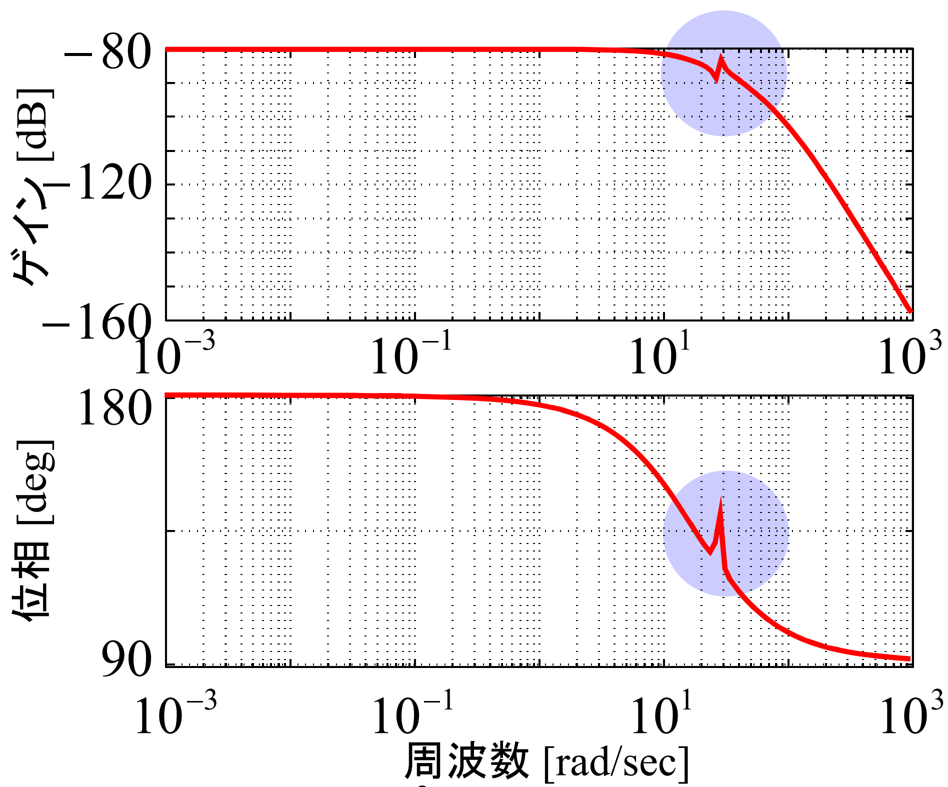


図6 プラント $P(s)$

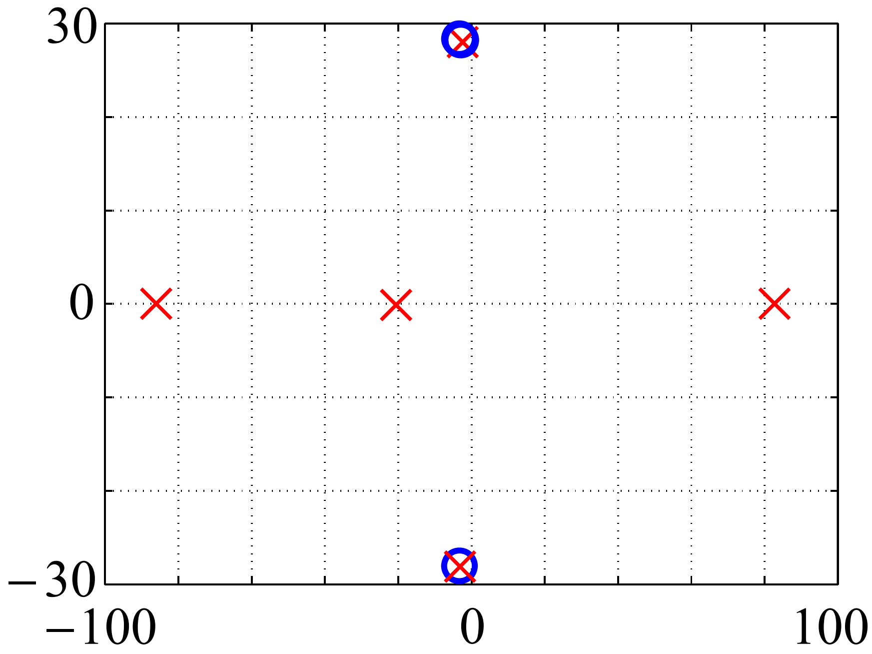


図7 プラント $P(s)$ の極・零点

混合感度問題

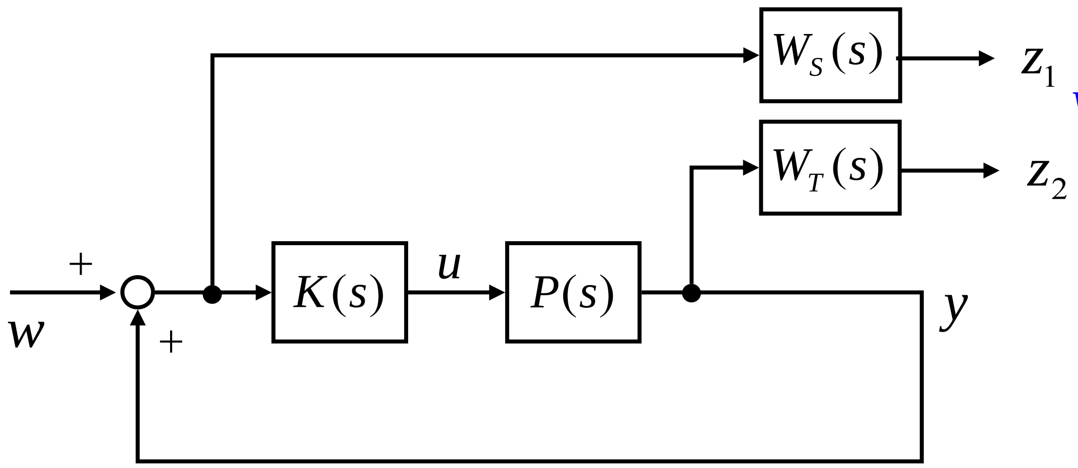


図9 ブロック線図

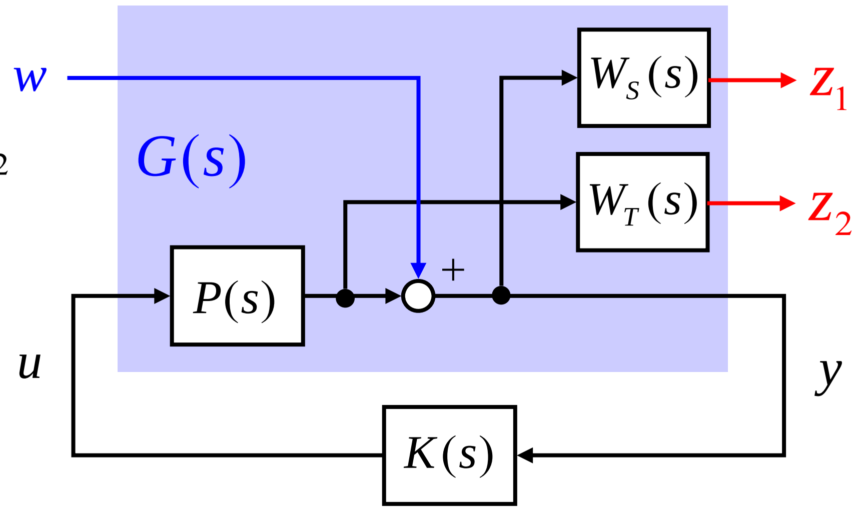


図10 一般化プラント

$$\left\| \begin{matrix} W_S(s)S(s) \\ W_T(s)T(s) \end{matrix} \right\|_\infty < 1$$

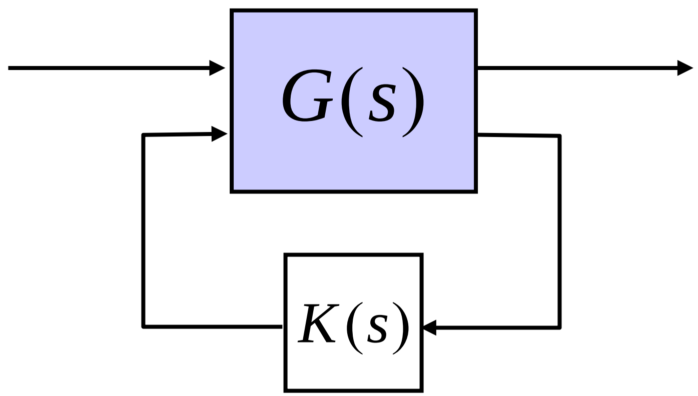


図11 一般化プラント

周波数重み $W_S(s)$

$$W_S(s) = \gamma_s \hat{W}_S(s),\quad \hat{W}_S(s) = \frac{ks}{1+\dfrac{s}{2\pi f_s}}$$

$$f_S = 0.016,\ k_S = 1.3298,\ \gamma_s = 17.2$$

MATLAB program

```
fs = 0.016 ;
ks = 1.3298 ;
gamma_s = 17.2 ;
Ws_num = ks ;
Ws_den = [ 1/(2*pi*fs)  1 ] ;
Ws _tf  = tf (gamma_s *Ws_num, Ws_den ) ;
bodemag(Ws_tf,omega1);
```

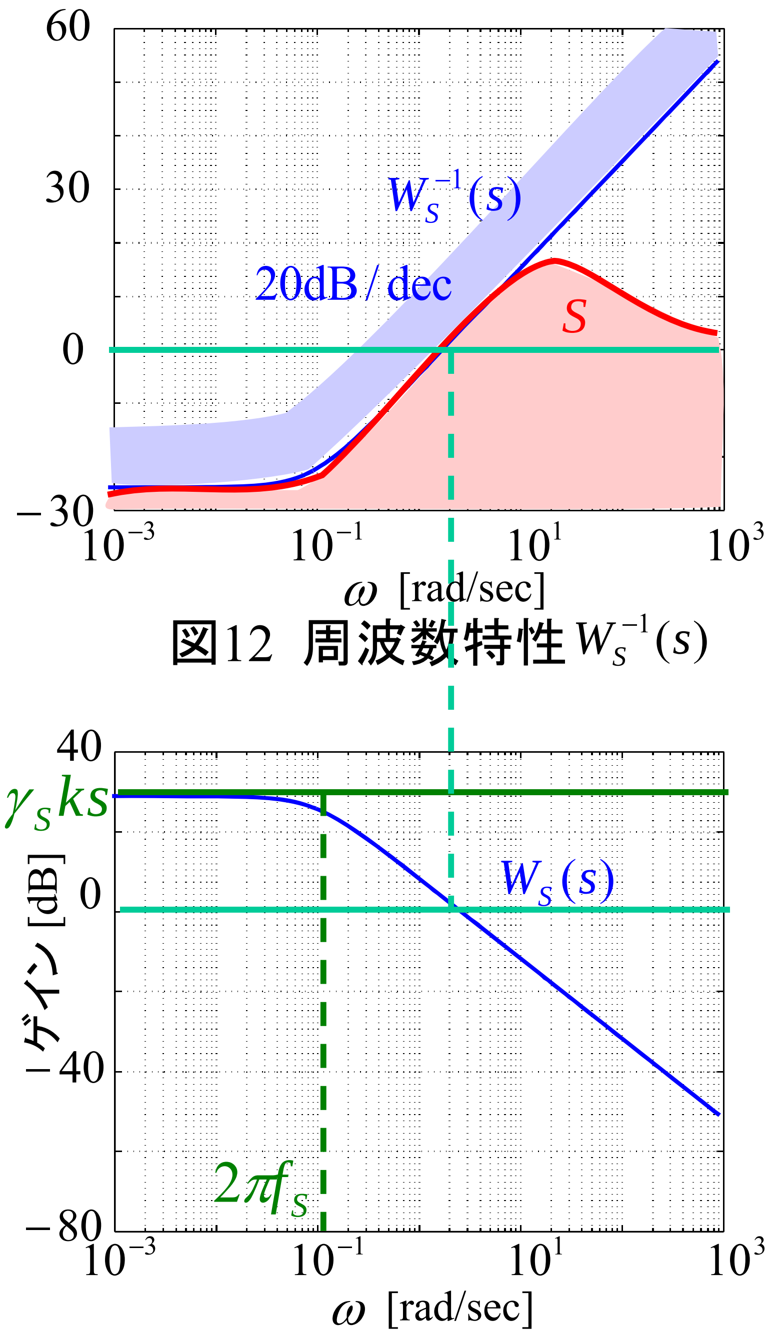


図12 周波数特性 $W_S^{-1}(s)$

図13 周波数重み $W_S(s)$

周波数重み$W_T(s)$

$$W_T(s) = k_T\left(1+\frac{s}{2\pi f_{T1}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{T2}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{T3}}\right)$$

$f_{T1} = 0.002,\ f_{T2} = 160,\ f_{T3} = 200,\ k_T = 10^{-4}$

MATLAB program

```
ft1 = 0.002 ; ft2 = 160 ; ft3 = 200 ; kt = 1e-4;
Wt1_num = [1 2*pi*ft1];Wt1_den = [2*pi*ft1];
Wt1 = tf(Wt1_num,Wt1_den);
Wt2_num = [1 2*pi*ft2];Wt2_den = [2*pi*ft2];
Wt2 = tf(Wt2_num,Wt2_den);
Wt3_num = [1 2*pi*ft3];Wt3_den = [2*pi*ft3];
Wt3 = tf(Wt3_num,Wt3_den);
Wt = Wt1*Wt2*Wt3*kt;
bodemag(Wt,1,omega1);
```

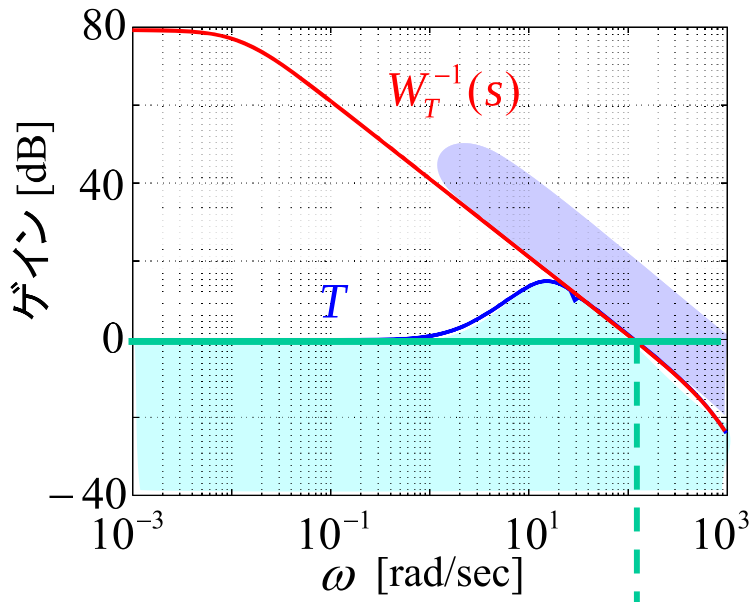


図14 周波数特性 $W_T^{-1}(s)$

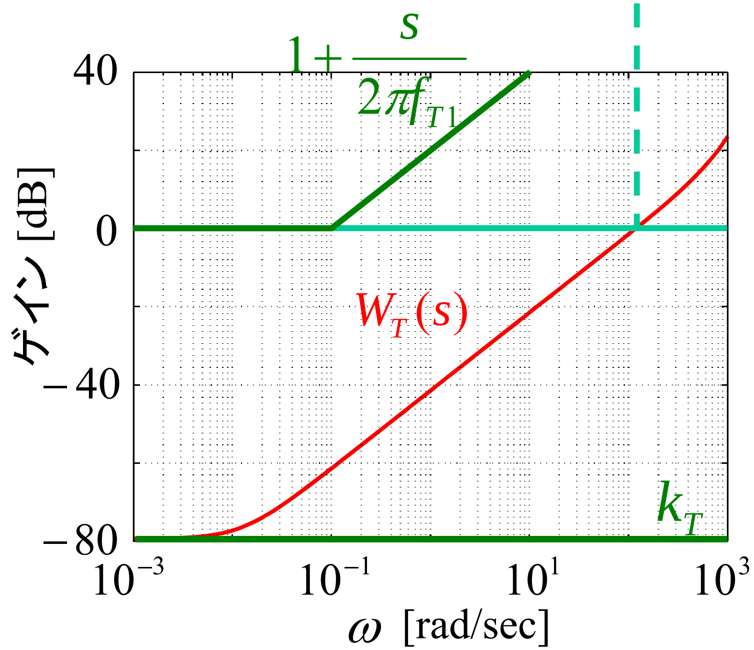


図15 周波数重み$W_T(s)$

一般化プラント

MATLAB program

```
systemnames = 'Ws_tf  PWt_ss';
inputvar = '[ dist; control ]';
outputvar = '[ Ws; PWt_ss(1); PWt_ss(2) + dist ]';
input_to_Ws_tf = '[ PWt_ss(2) + dist ]';
input_to_PWt_ss = '[ control ]';
sysoutname = 'G';
cleanupsysic = 'yes';
sysic;
```

＊ $PW_T(s)$ の構成方法は付録参照

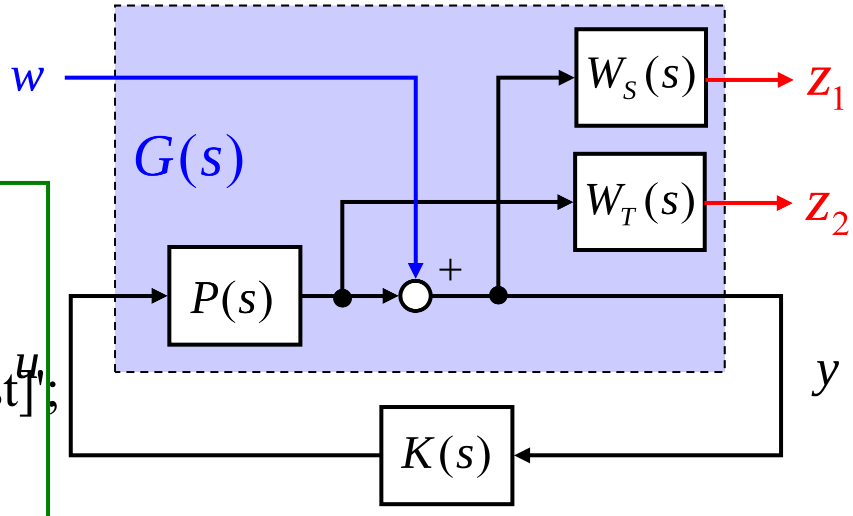


図10 一般化プラント

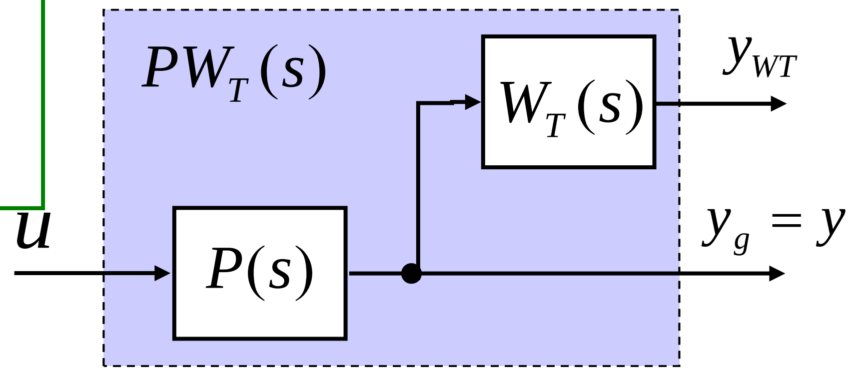


図16 周波数重み $W_T(s)$ の合併

コントローラ $K(s)$

$$K(s) = \frac{-5.12\times 10^{10}(s+1.972)(s+18.0)(s+84.4)(s+0.699\pm j28.9)}{(s+0.10)(s+4232)(s+1176\pm j400)(s+0.655\pm j28.2)}$$

極

-0.10

-4232

$-1176\pm j400$

$-0.655\pm j2.82$

安定

零点

-1.972

-18.0

-84.4

$-0.699\pm j28.9$

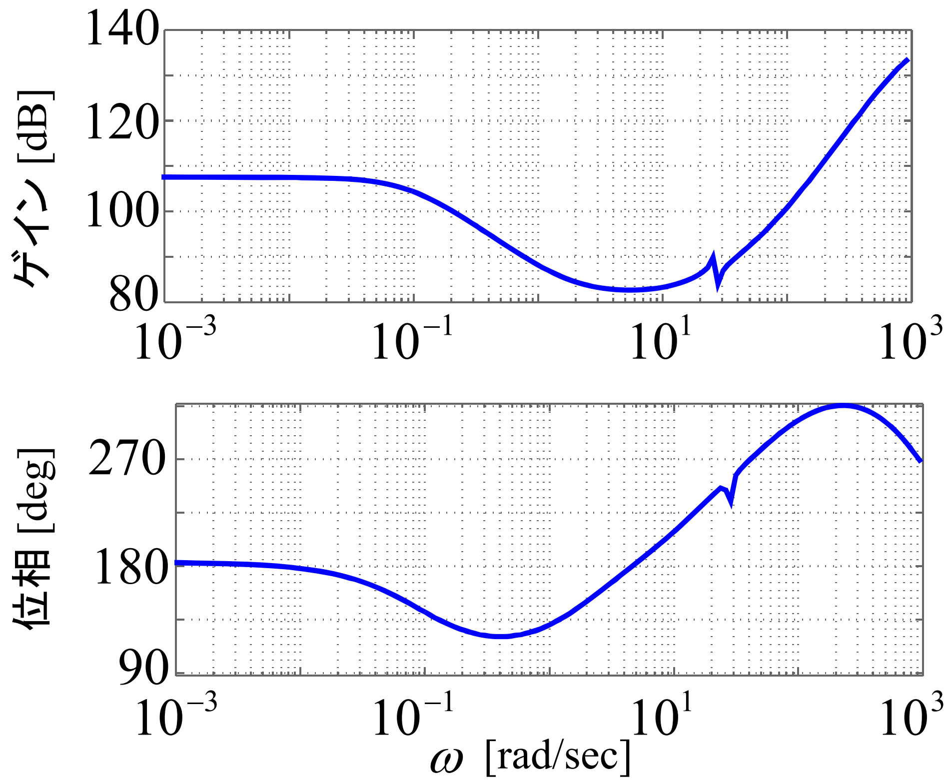


図17 コントローラ $K(s)$

MATLAB program

```
[ K_mix_ss, Cloop,gam ]
= hinfsyn ( G, 1, 1, 'gmax', 1, 'gmin',1, 'tolgam', 0.001 ) ;
[K_A,K_B,K_C,K_D] = ssdata(K_mix_ss);
[ K_num, K_den ] = ss2tf ( K_A, K_B, K_C, K_D ) ;
K_tf = tf ( K_num, K_den ) ;
zpk(K_tf)
minfo(K_mix)
[ K_pole, K_zero ] = pzmap ( K_tf )


bode(K_mix_ss,omega1);
```

開ループ伝達関数

MATLAB program

```
L_ss  = P_ss*K_mix_ss;
bode(L_ss,omega1)
[ Gm, Pm, Wcg, Wcp ] …
                = margin( L_ss )
```

ゲイン余裕　1.69 [dB]

位相余裕　27.0 [deg]

ゲイン交差周波数　58.2 [rad/sec]

位相交差周波数　13.6 [rad/sec]

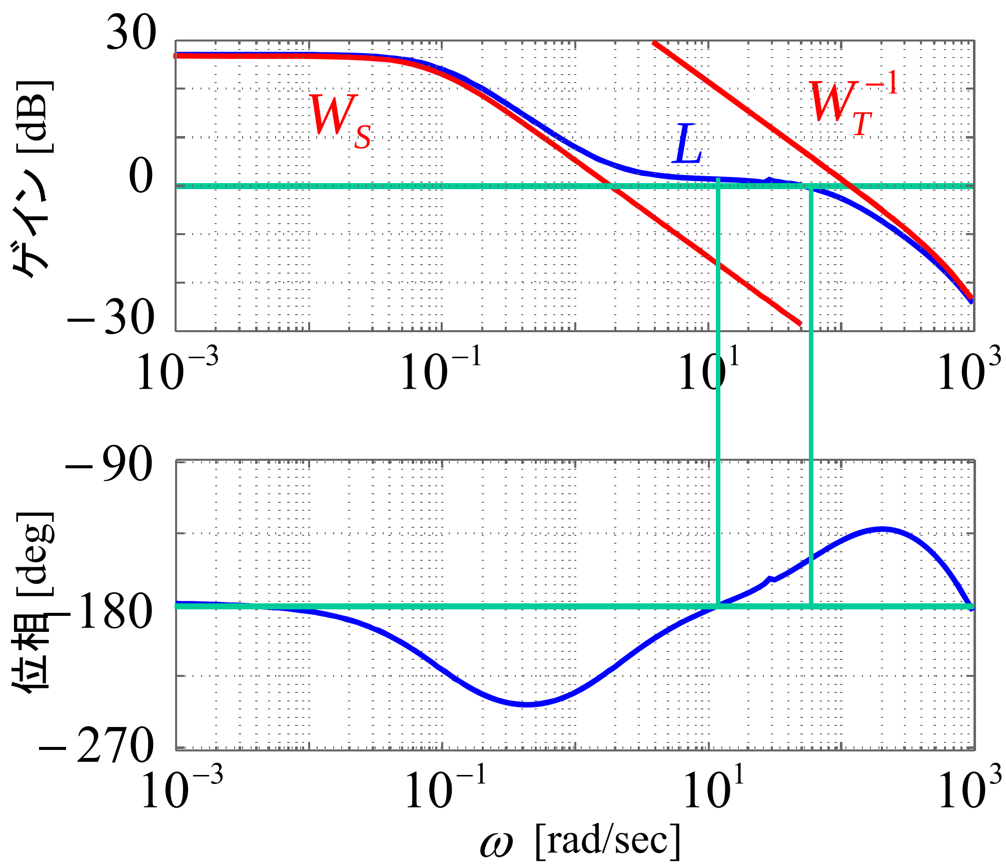


図22 開ループ伝達関数

MATLAB program

```
nyquist ( L_ss )
```

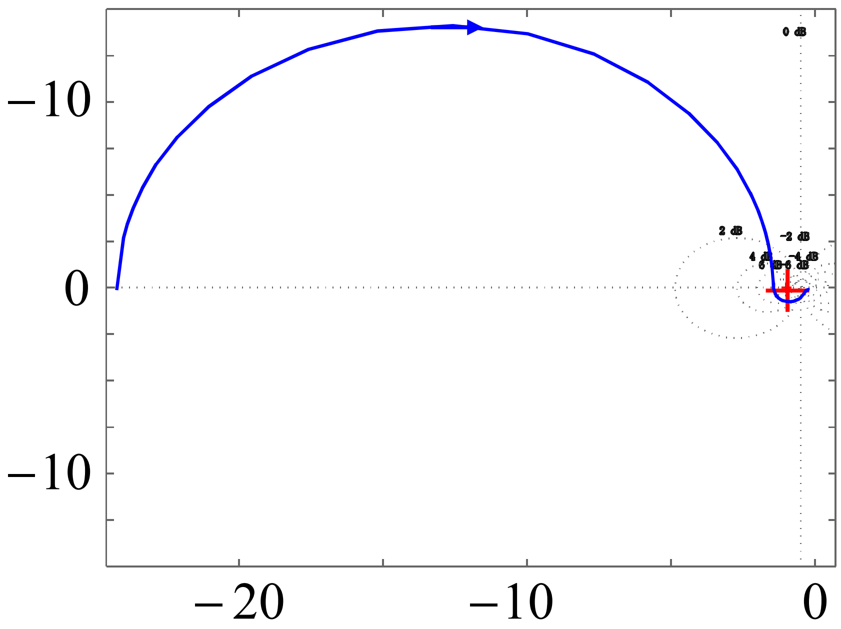


図23 ベクトル軌跡

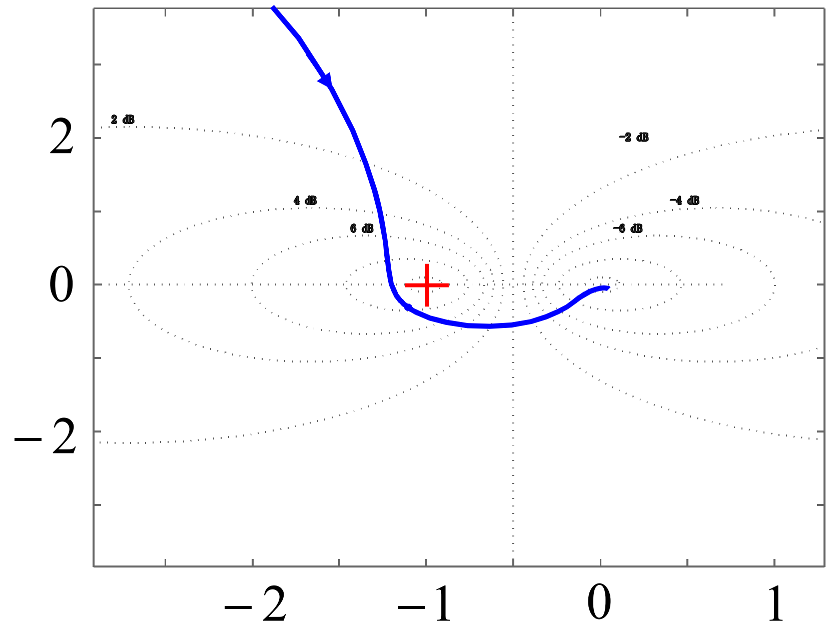


図24 ベクトル軌跡

閉ループ系の特性

MATLAB program

```
T = feedback(L_ss,1);
close_p = pole ( T  )
close_z = zero ( T  )
pzmap ( T )
```

極 $-6.54\times10^{-1} \pm j2.82\times10^{1}$,
$-6.98\times10^{-1} \pm j2.89\times10^{1}$,
$-1.10\times10^{1} \pm j1.08\times10^{1}$,
-1.80×10^{1}, -8.44×10^{1},
-1.01×10^{3}, -1.26×10^{3},
-4.29×10^{3},

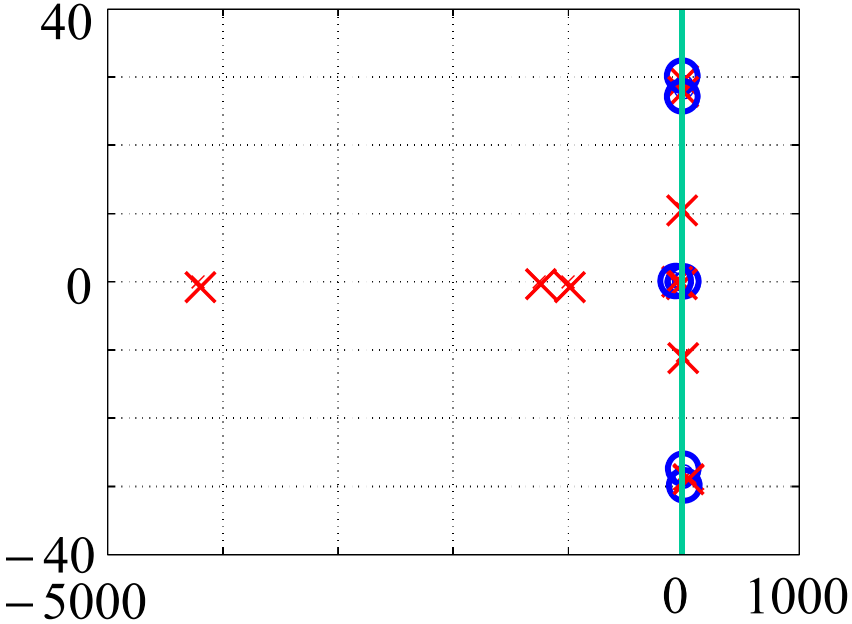


図18　閉ループ系の極・零点

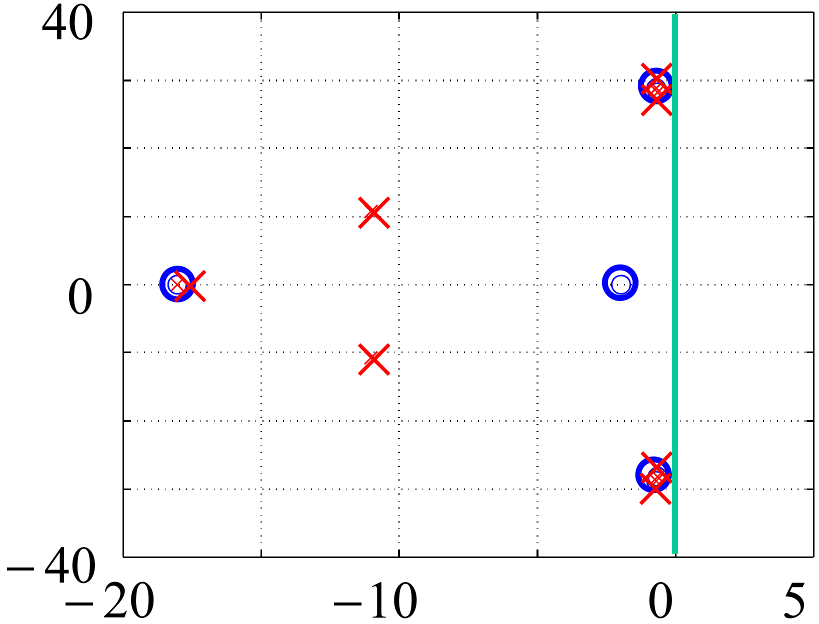


図19　閉ループ系の極・零点（拡大図）

閉ループ系の周波数特性

MATLAB program

```
nom_perf_ss =  Cloop(1,1);
rob_stab_ss = Cloop(2,1)
bodemag(nom_perf_ss,omega1)
bodemag(rob_stab_ss,omega1)
```

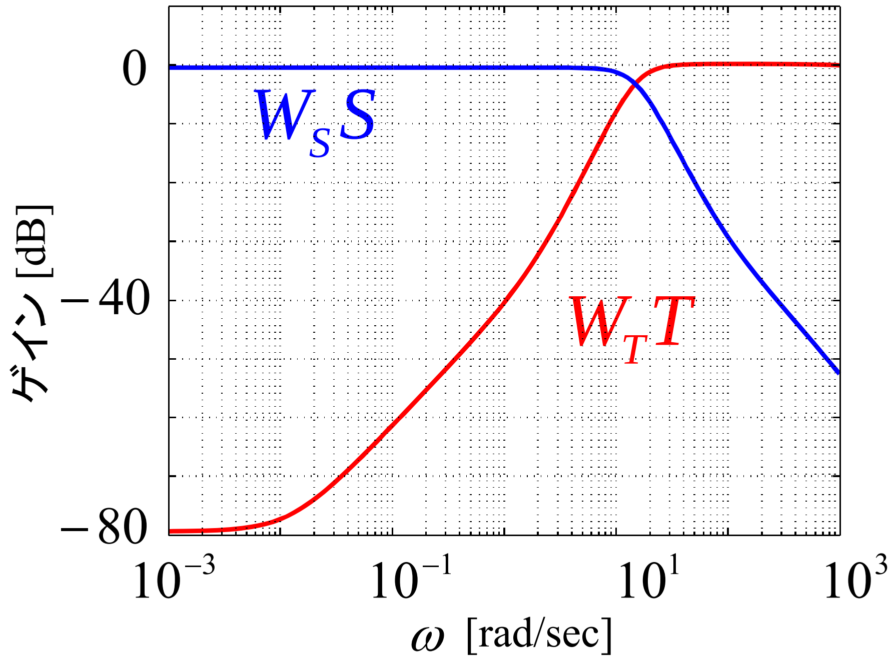


図21 閉ループ系の周波数特性 $W_S S$, $W_T T$

MATLAB program

```
sigma(Cloop,omega1)
```

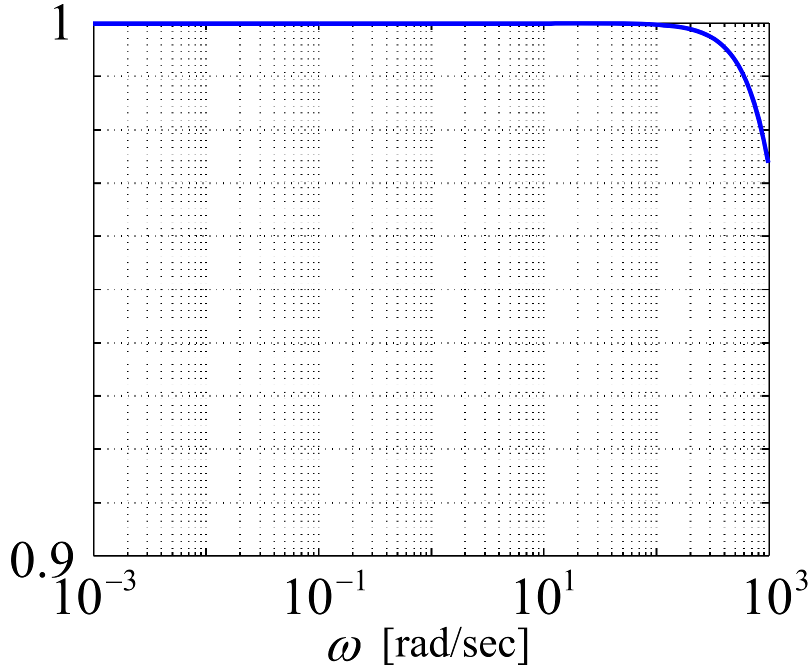


図20 閉ループ系の周波数特性 $\bar{\sigma}(T_{zw})$

感度関数 S

MATLAB program

```
S = feedback(1,L_ss);
bodemag(S,omega2)
hold on
bodemag(inv(Ws_tf),omega1)
```

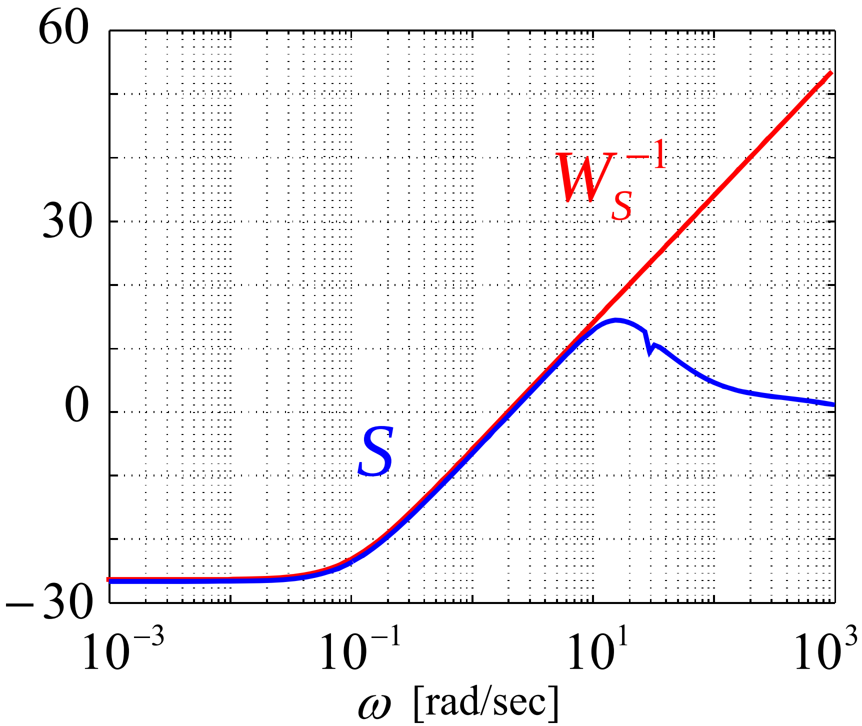


図25 感度関数

相補感度関数 T

MATLAB program

```
T = feedback(L_ss,1);
hold on
bodemag(T,omega2)
bodemag(inv(Wt))
```

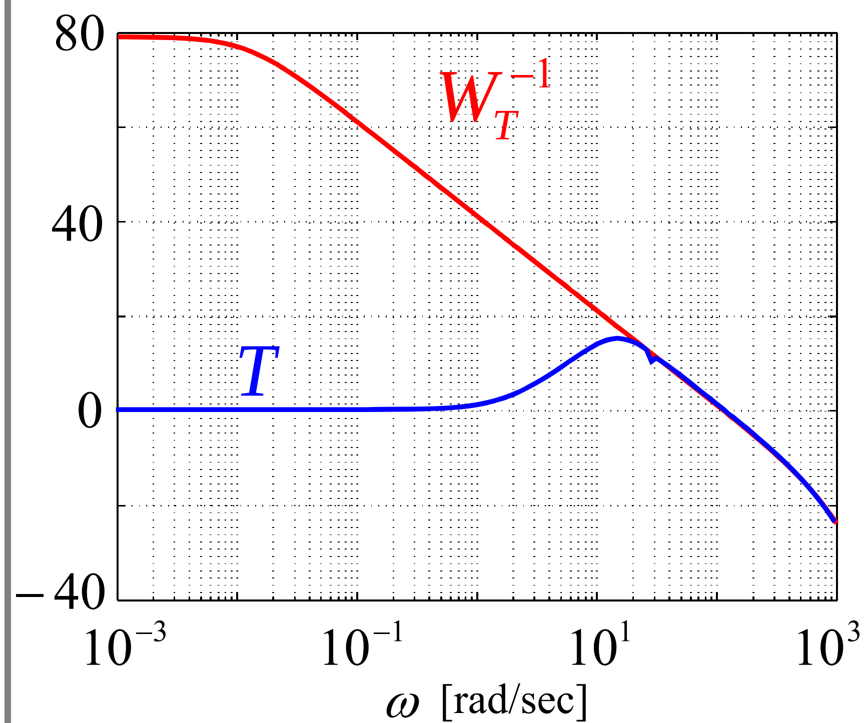
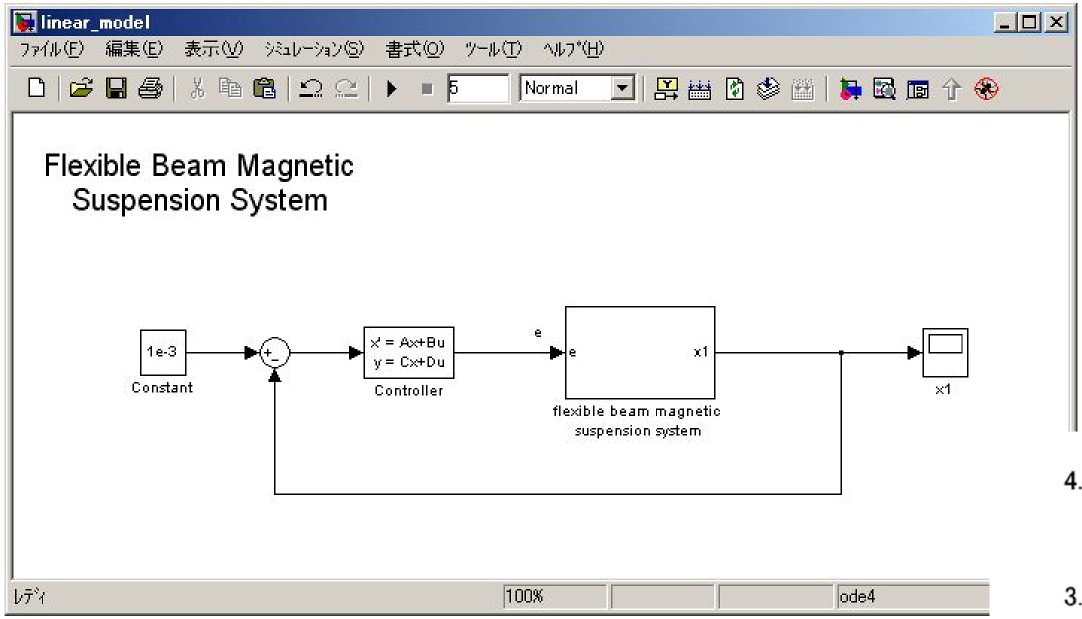


図26 相補感度関数

ステップ応答

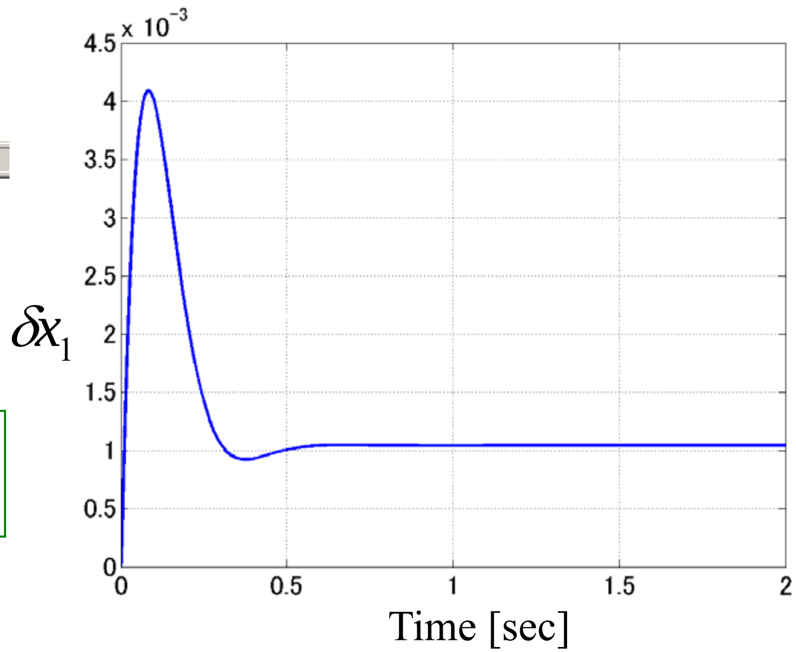
線形モデルに対する応答



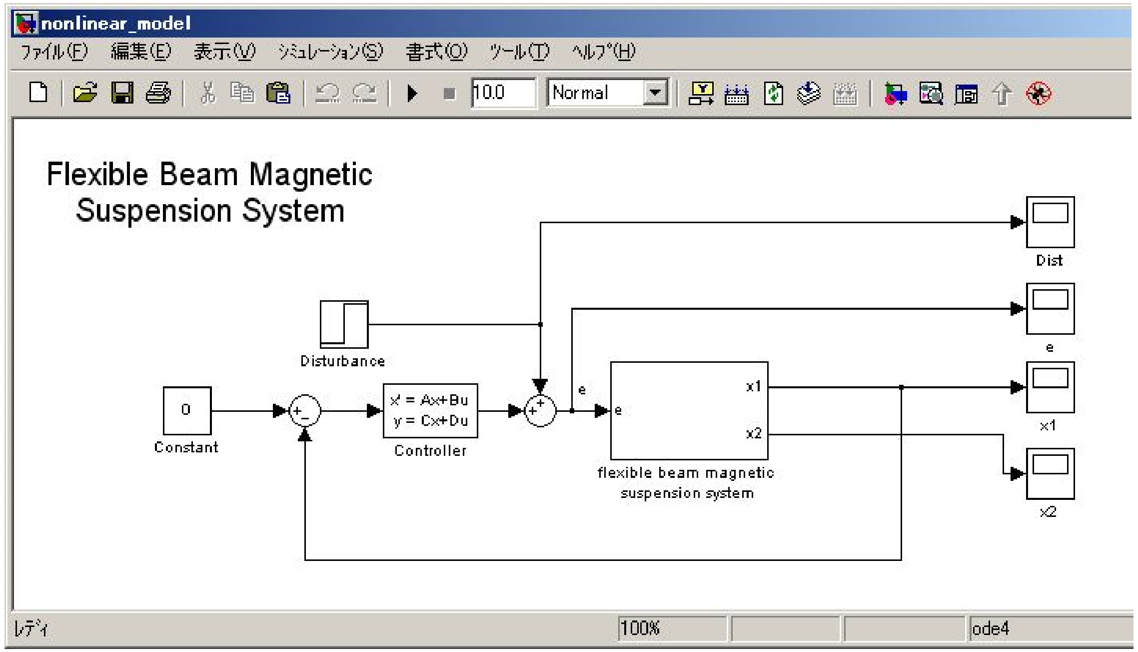
Linear_model.mdl

MATLAB program

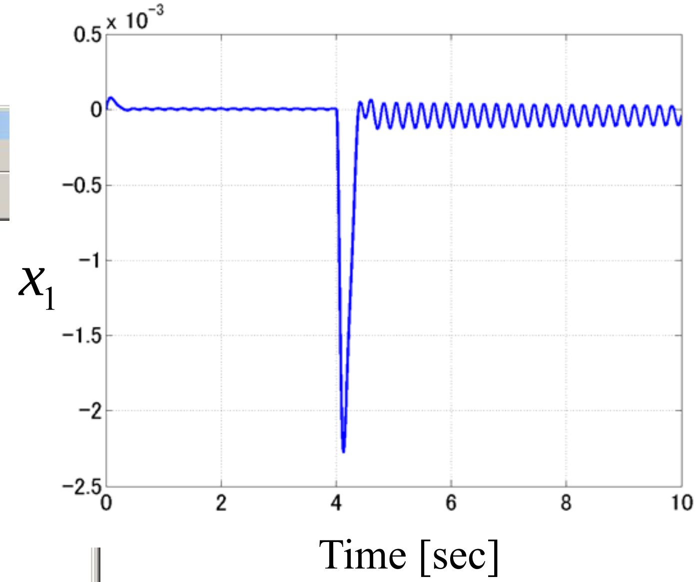
```
[K_A,K_B,K_C,K_D] = ssdata(K_mix_ss);
```

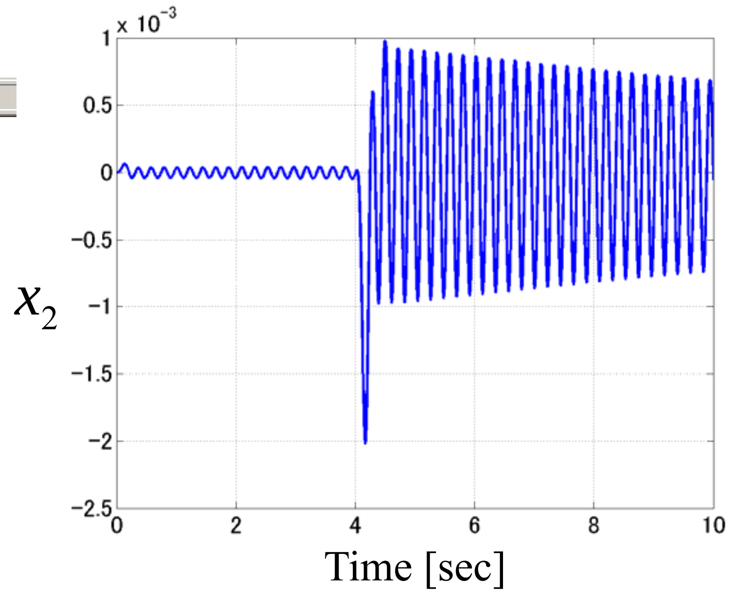


シミュレータ応答



nonlinear_model.mdl





\>> simu_setup

1. 外乱応答
2. 外乱応答 m=5.8 --> 6.95
3. 外乱応答 M=10.36 --> 12.30
4. 外乱応答 R=57.0 --> 61.7

1 から 4 のいずれかを選ぶ

実験結果

外乱応答

約 21 [N] に相当する電圧（定常吸引力　約 100 [N]）

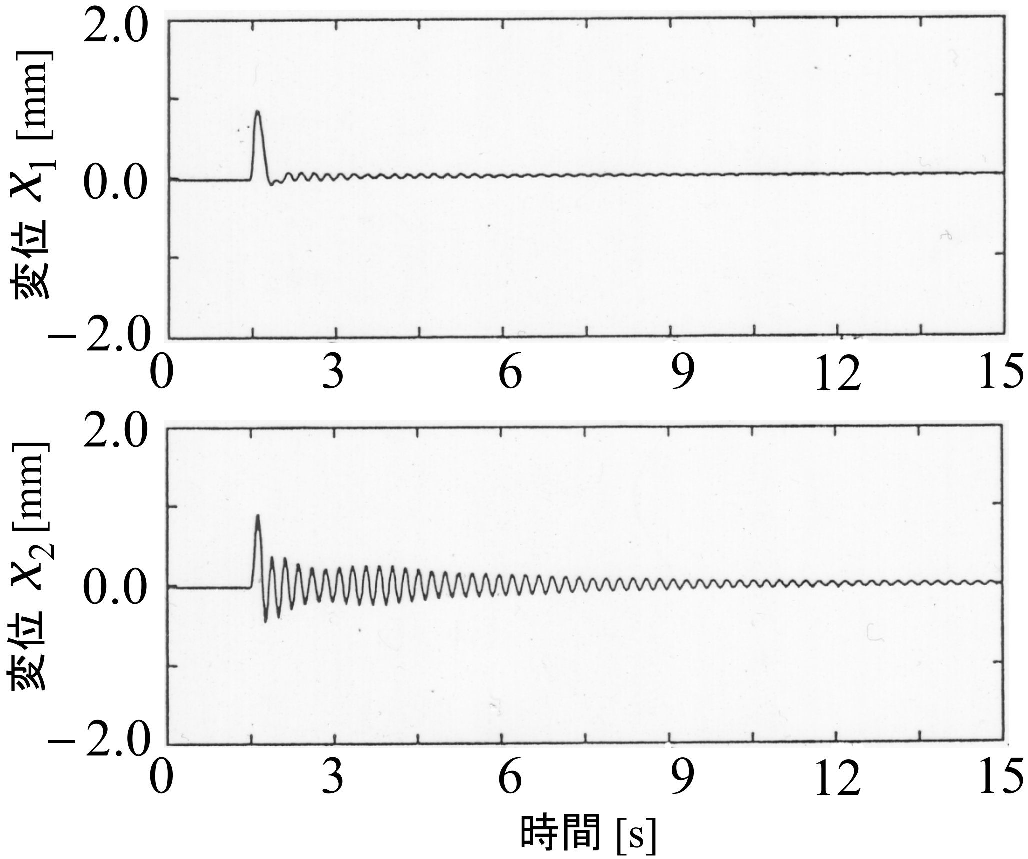


図27 ステップ状外乱に対する時間応答

（1）電磁石側の質量 m を 5.80 [kg] から 6.95 [kg] にする.

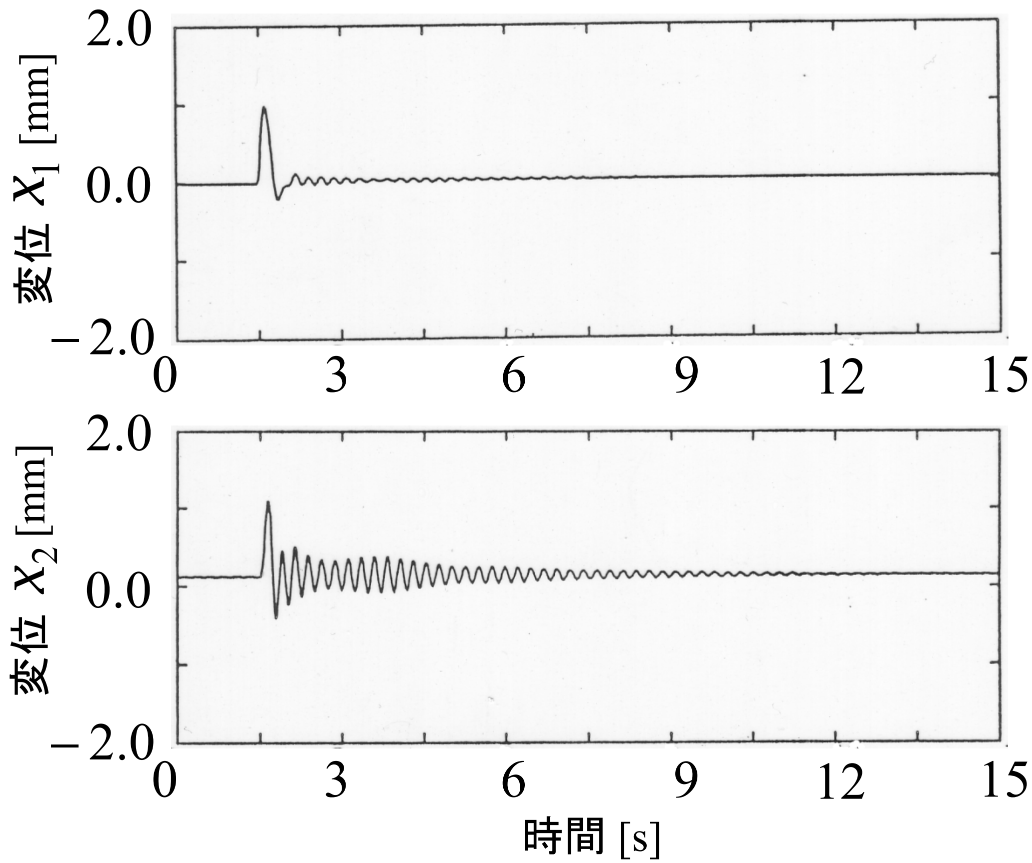


図28 ステップ状外乱に対する時間応答
$m = 6.95$ [kg] に変動した場合

(2) ビーム中央部の質量 M を 10.36 [kg] から 12.30 [kg] にする.

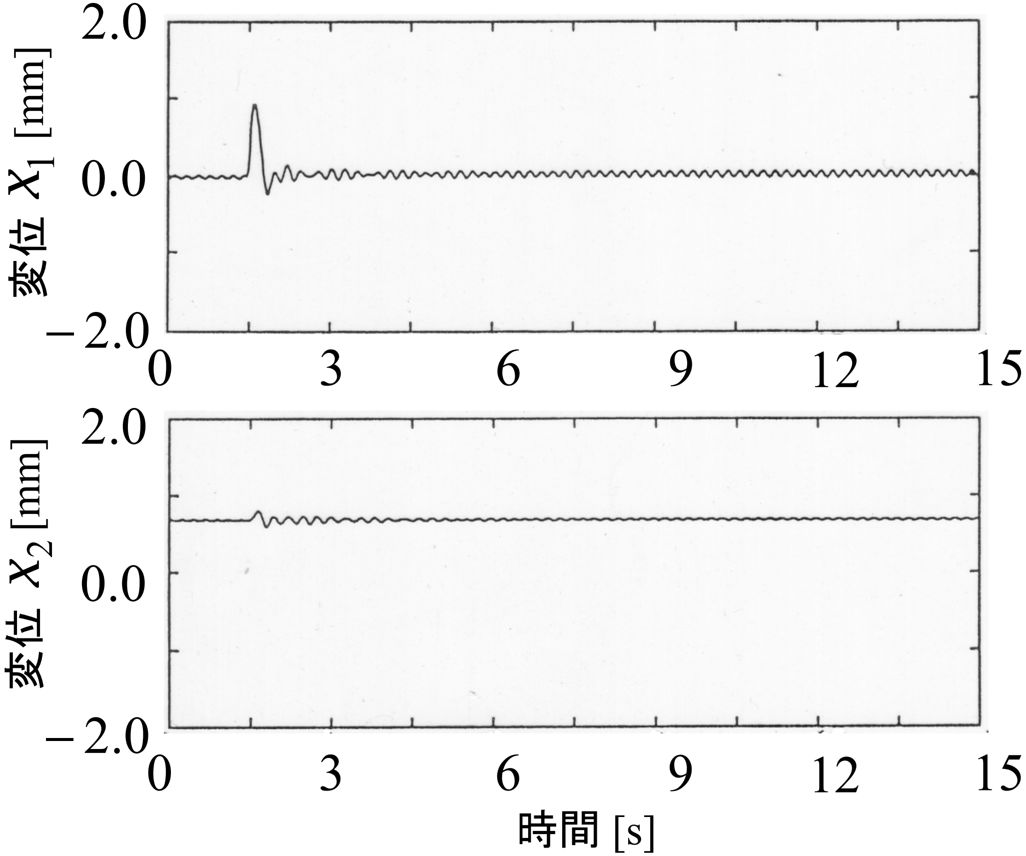


図29 ステップ状外乱に対する時間応答
$M = 12.3$ [kg] に変動した場合

（3）電磁石部の抵抗 R を 57.0 [Ω] から 61.7 [Ω] にする.

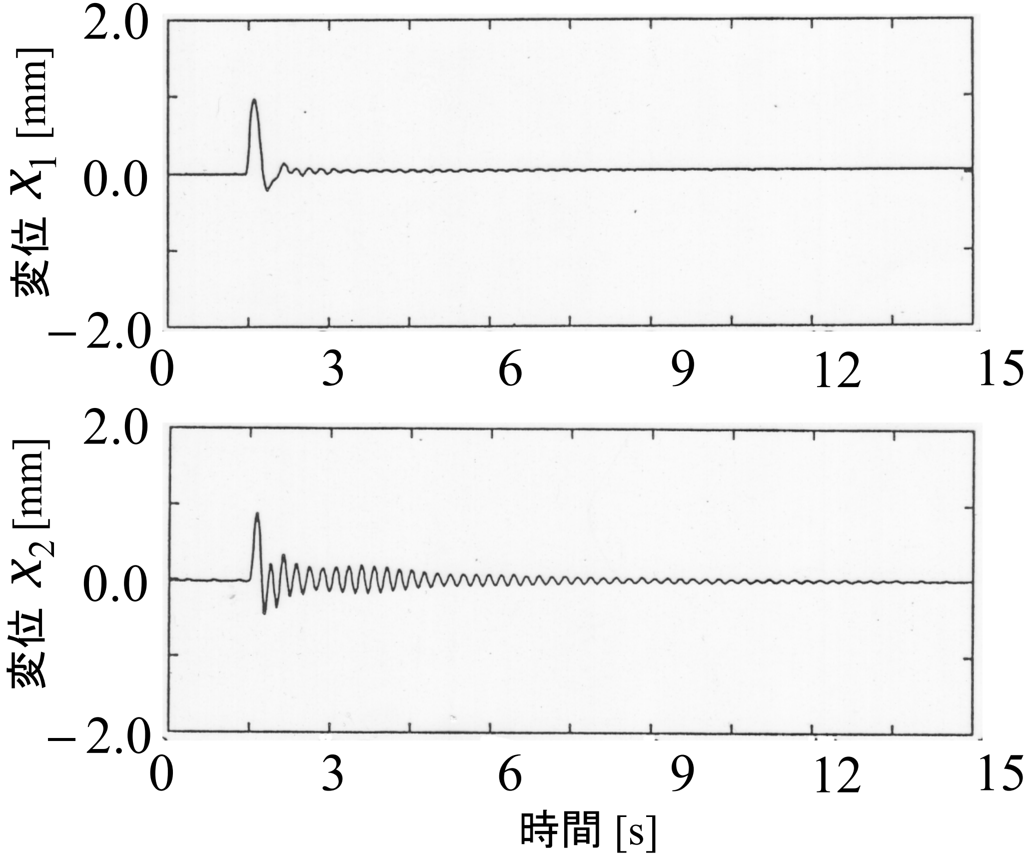


図30 ステップ状外乱に対する時間応答
$R = 61.7$ [Ω] に変動した場合

[参考]過去の実験結果

積分型LQG制御系

外乱応答

約 7.15 [N] に相当する電圧（定常吸引力 約 100 [N]）

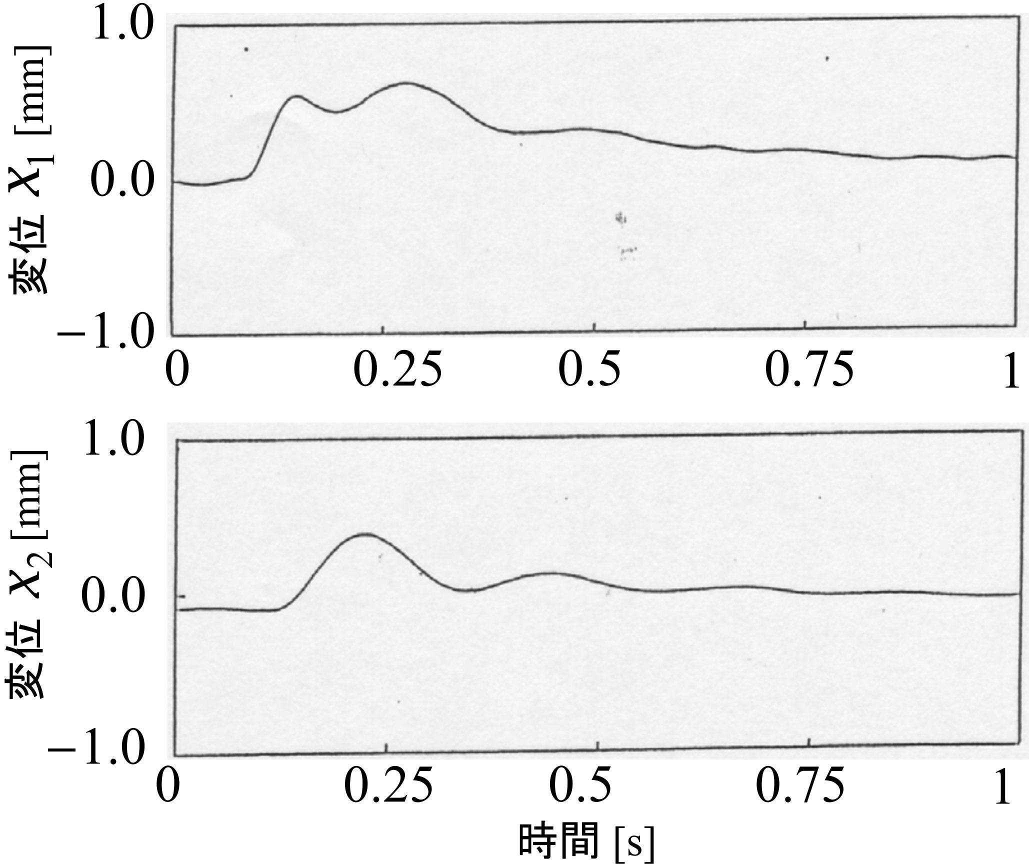


図 ステップ状外乱に対する時間応答

閉ループ系の周波数特性

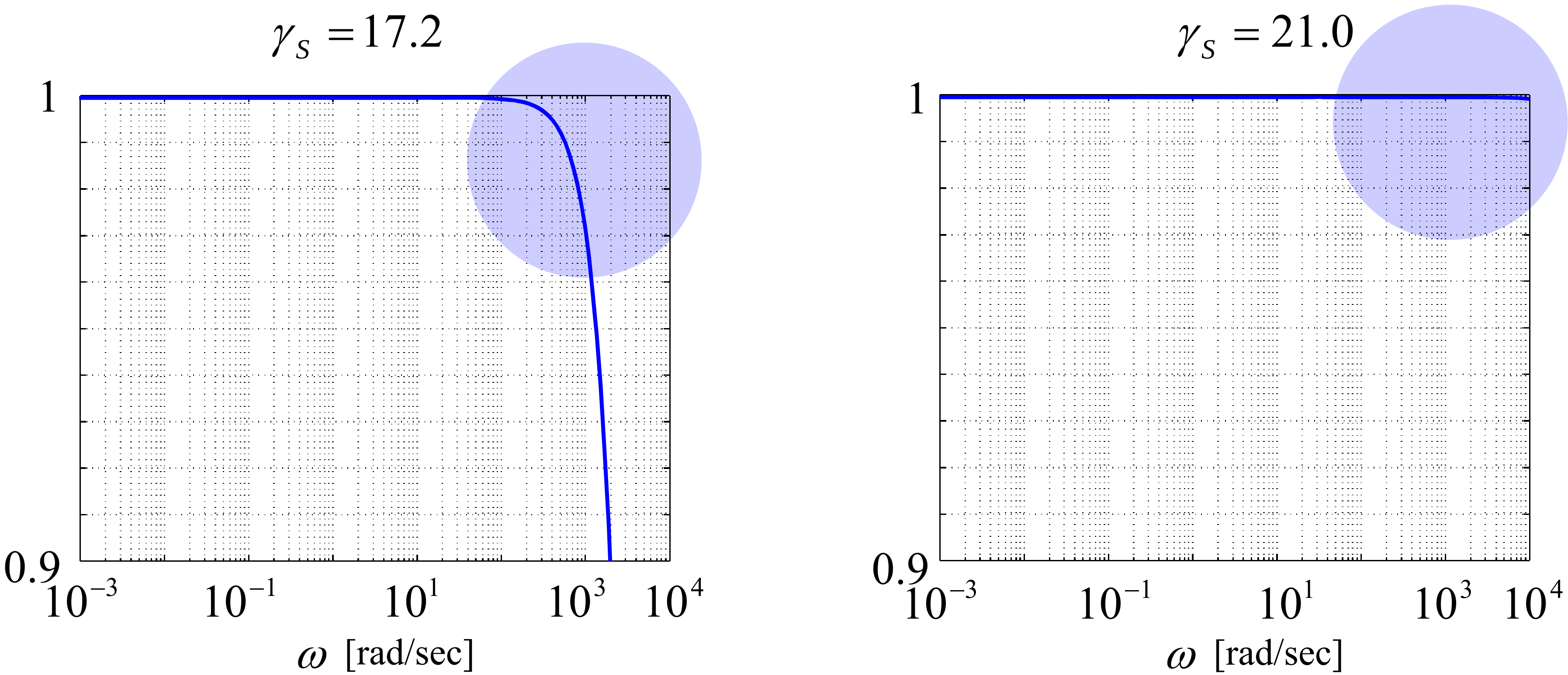


図31 閉ループ系の周波数特性 $\bar{\sigma}(T_{zw})$ 　図32 閉ループ系の周波数特性 $\bar{\sigma}(T_{zw})$

閉ループ系の周波数特性

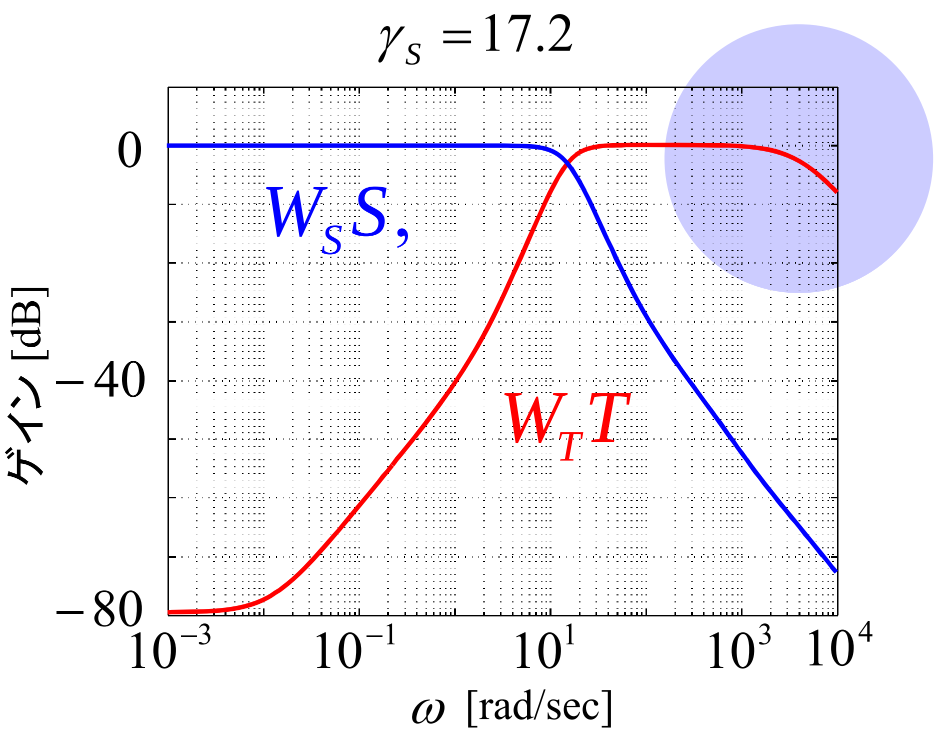


図33 閉ループ系の周波数特性
$W_S S$，$W_T T$

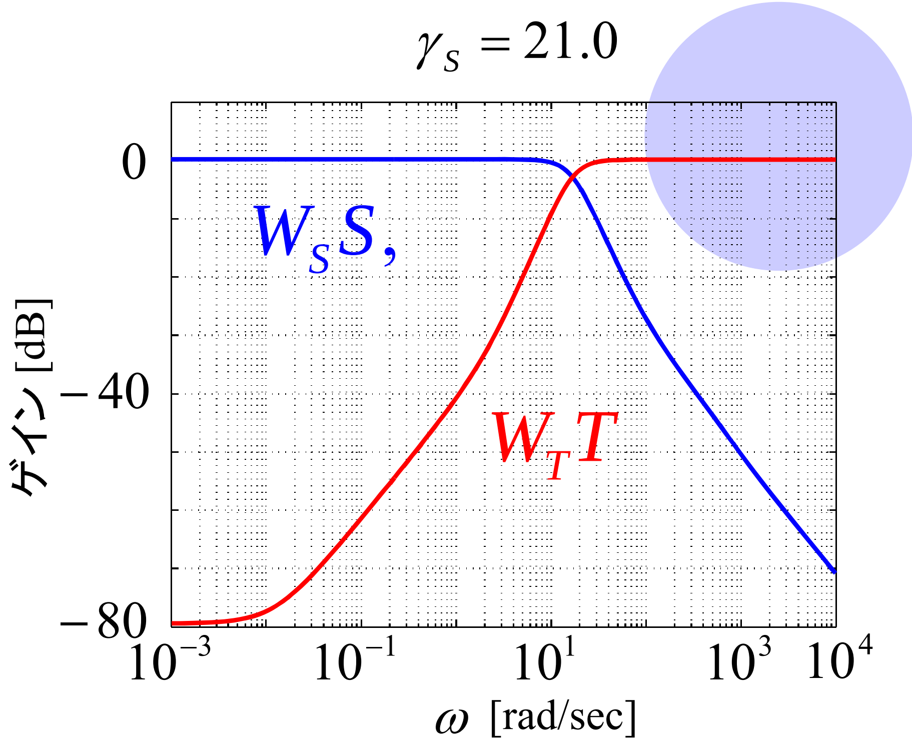


図34 閉ループ系の周波数特性
$W_S S, W_T T$

感度関数 S

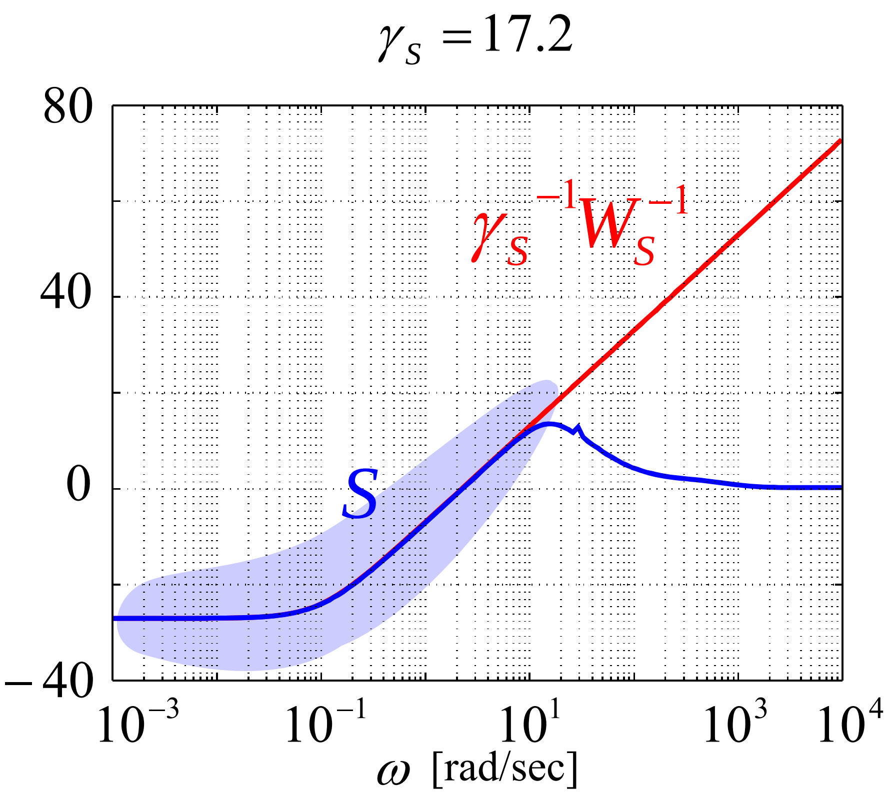


図35 感度関数

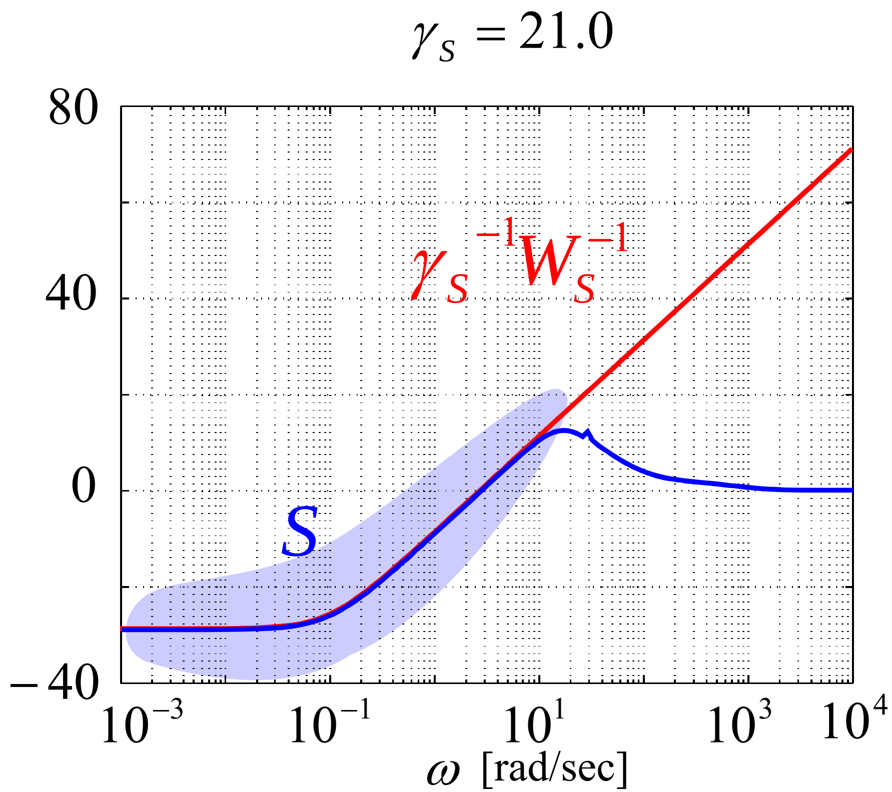


図36 感度関数

感度関数 S と相補感度関数 T

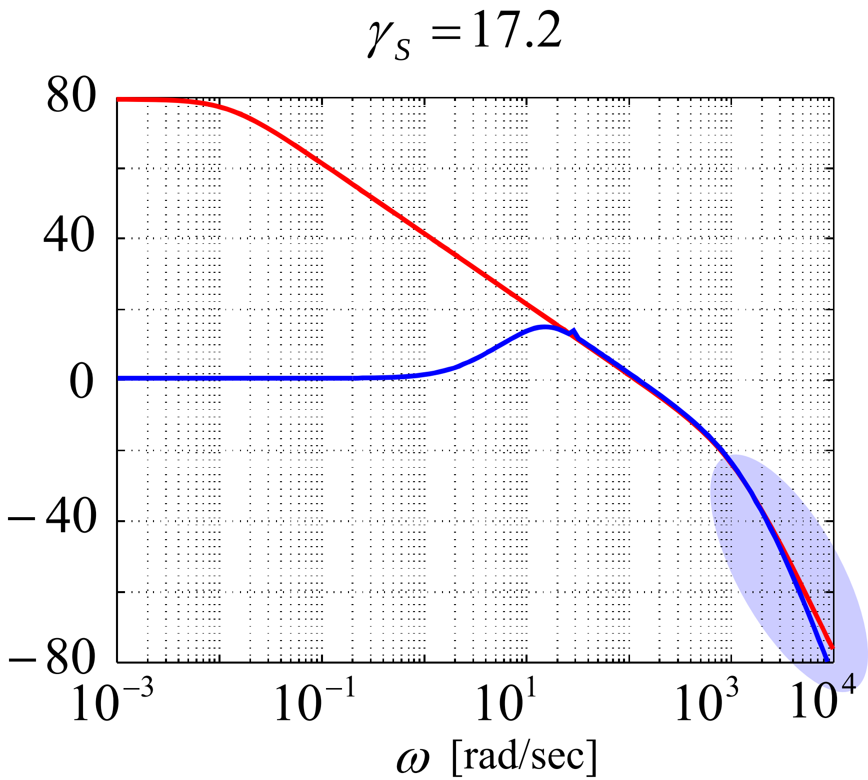


図37 相補感度関数

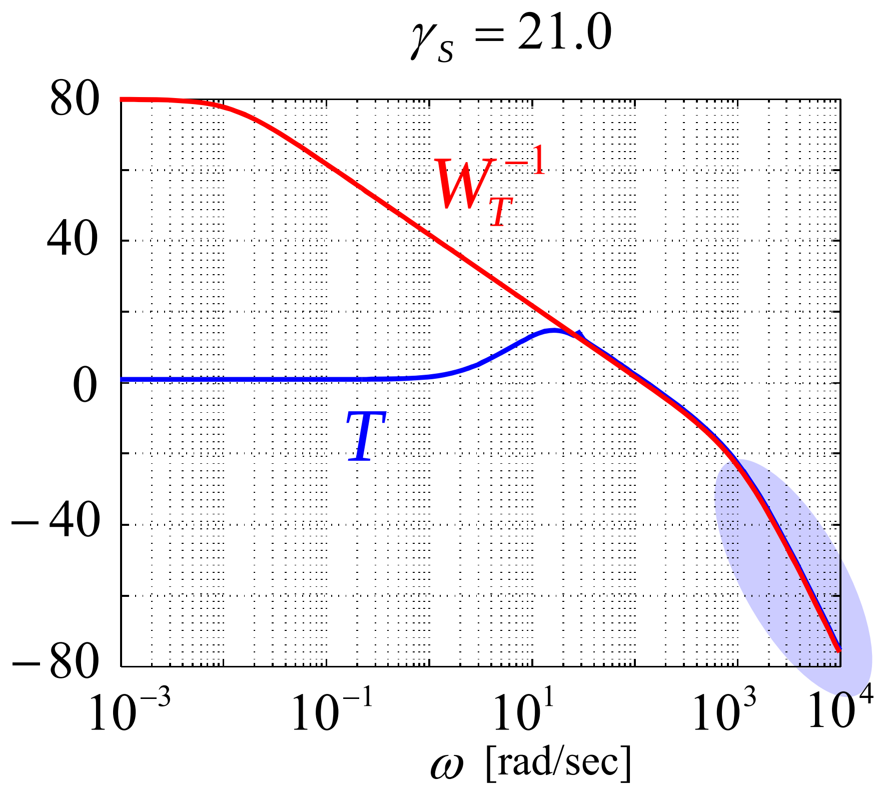


図38 相補感度関数

開ループ伝達関数

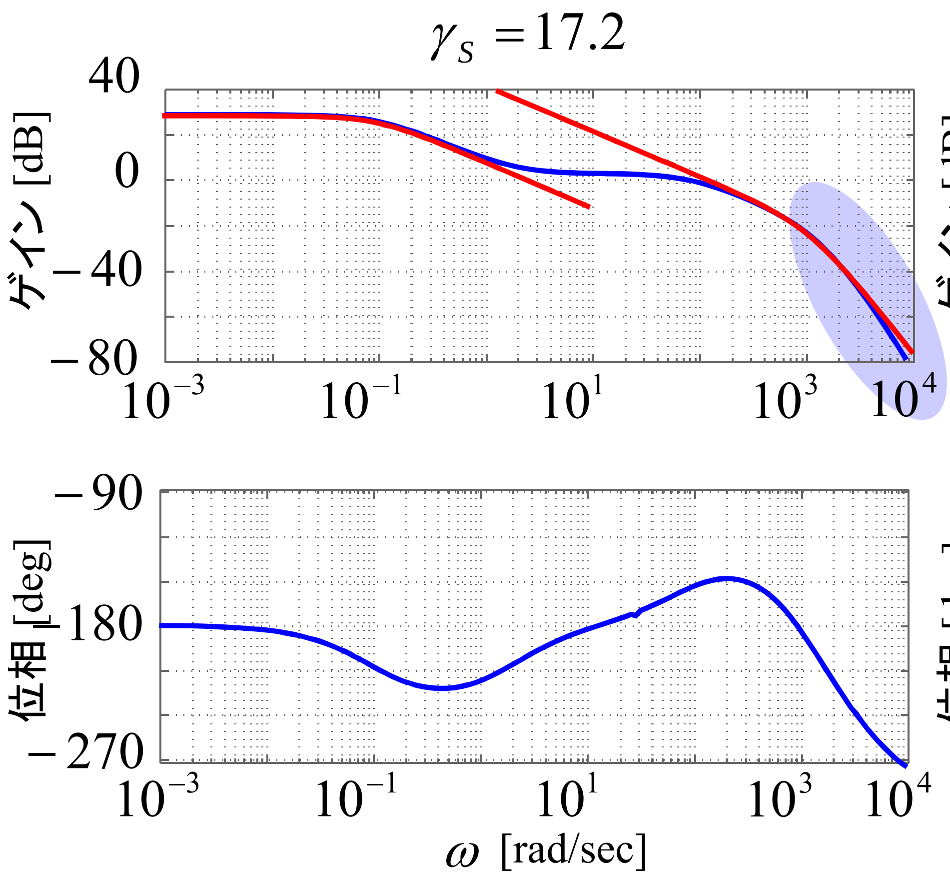


図39 開ループ伝達関数

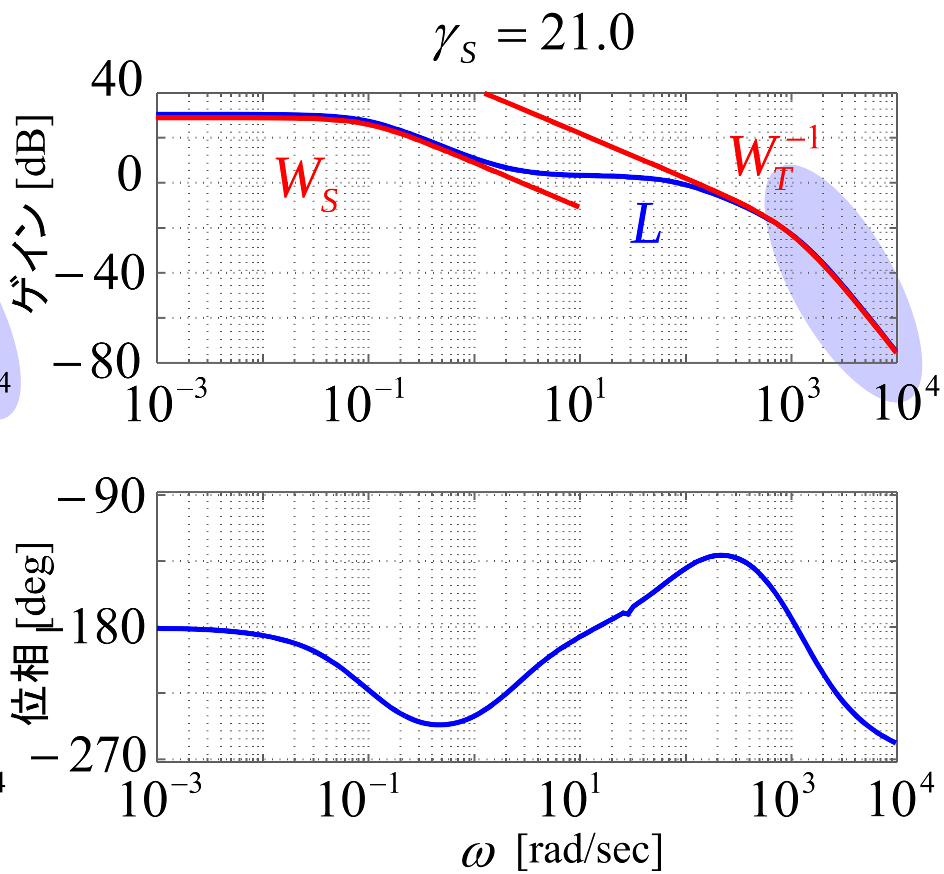


図40 開ループ伝達関数

制御対象

$$P(s) = \frac{-13.3(s+0.654+j28.2)(s+0.654-j28.2)}{(s+84.4)(s-84.1)(s+18.0)(s+0.697\pm j28.8)}$$

コントローラ

$$K(s) = \frac{-5.12\times 10^{10}(s+1.972)(s+18.0)(s+84.4)(s+0.699\pm j28.9)}{(s+0.10)(s+4232)(s-1176\pm j400)(s+0.655\pm j28.2)}$$

閉ループ系の極

$$-1.01\times 10^{-1},$$
$$-6.55\times 10^{-1}\pm j2.82\times 10^{1},$$
$$-6.99\times 10^{-1}\pm j2.89\times 10^{1},$$
$$-1.10\times 10^{1}\pm j1.08\times 10^{1},$$
$$-1.80\times 10^{1},\ -8.44\times 10^{1},$$
$$-1.01\times 10^{3},\ -1.26\times 10^{3},\ -4.29\times 10^{3},$$

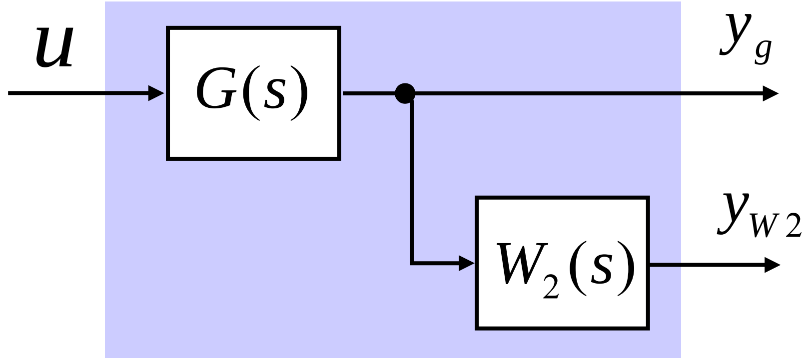
共振ピークが閉ループ系の極になっている

付録

周波数重み $W_S(s)$

$$\dot{x}_{WS} = A_{WS}x + B_{WS}u_{WS}$$

$$y_{WS} = C_{WS}x_{WS} + D_{WS}u_{WS}$$



周波数重み $W_2(s)$ の合併

周波数重み $W_T(s)$

$$W_T(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

周波数重み $W_T(s)$は状態空間表現できない

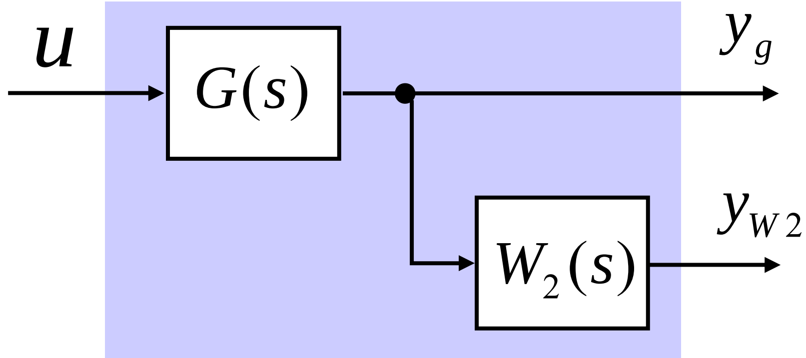
- 制御対象と周波数重み$W_T(s)$ を合併
- 周波数重み $W_S(s)$まで含んだ一般化プラント

D_{12} のフルランク条件を満たすように決定. 制御対象の相対次数が3次であるので周波数重み$W_T(s)$ の分子の次数が分母の次数より3次高ければフルランク条件を満たす.

初期値を 0 として制御対象の状態方程式をラプラス変換

$$sX_g(s) = A_g X_g(s) B_g U_g(s)$$

$$Y_g(s) = C_g X_g(s)$$



周波数重み $W_2(s)$ の合併

$$Y_{WT} = W_T G U_g = W_T Y_g = W_T C_g X_g$$

$$= (a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) C_g X_g$$

$$= a_3 C_g s^3 X_g + a_2 C_g s^2 X_g + a_1 C_g s X_g + a_0 C_g X_g$$

定常状態を考え, 制御入力がほとんど変化しないとする

$$s^2 X_g = s\{A_g X_g + B_g U_g\} = A_g \{A_g X_g + B_g U_g\} \qquad (\because sU_g(s) = 0)$$

$$= A_g^2 X_g + A_g B_g U_g$$

同様にして

$$s^3 X_g = A_g^3 X_g + A_g^2 B_g U_g$$

$$Y_{WT} = C_{WT} X_g + D_{WT} U_g$$

$$C_{WT} = C_g \left\{ a_3 A_g^3 + a_2 A_g^2 + a_1 A_g + a_0 I \right\}$$

$$D_{WT} = C_g \left\{ a_3 A_g^2 + a_2 A_g + a_1 I \right\} B_g$$

制御対象と重み $W_T(s)$ を含んだ系

$$\dot{x} = A_g x_g + B_g u_g$$

$$\begin{bmatrix} y_g \\ y_{WT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_g \\ C_{WT} \end{bmatrix} x_g + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{WT} \end{bmatrix} u_g$$