Robust and Optimal Control, Spring 2015

Instructor: Prof. Masayuki Fujita (S5-303B)

S: Flexible Beam: Signal-based H_∞ control

Reference:

M. Fujita, F. Matsumura and K. Uchida,
Experiments on the H_∞ Disturbance Attenuation Control of a Magnetic Suspension System,
Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control,
Honolulu, Hawaii, December, 1990.

柔軟ビーム磁気浮上システム

Real Physical System

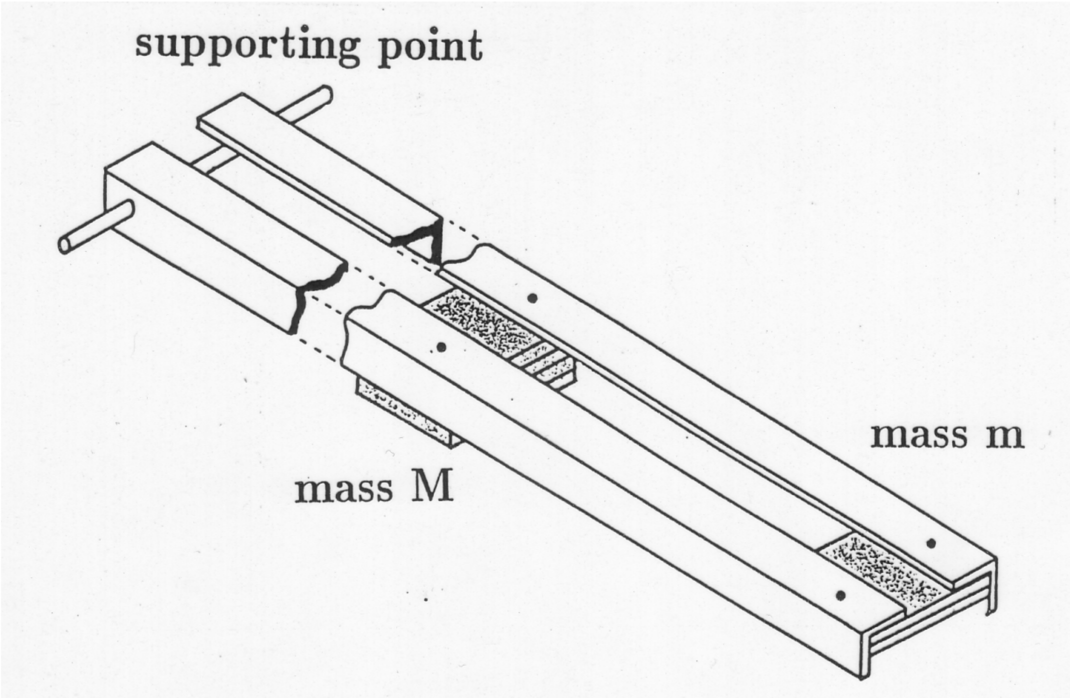


図2 柔軟ビーム

Ideal Physical Model

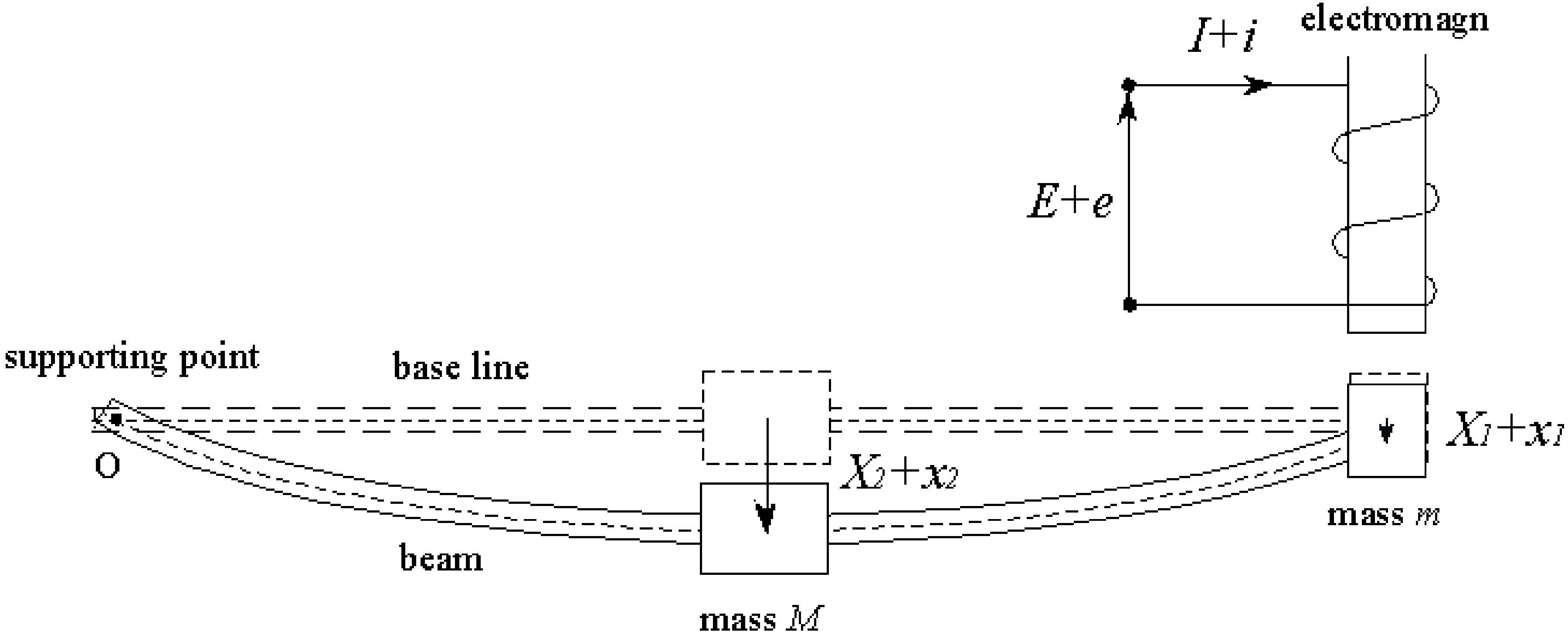


図3 柔軟ビーム磁気浮上系

モデリングのための仮定

1. 磁気飽和, ヒステリシスがない.
2. うず電流は無視できる.
3. もれ磁束がない.
4. 鉄心の透磁率は無限大である.
5. 2 質量 m, M からなる集中定数系として近似する.
6. インダクタンスは一定, 速度起電力の項は無視.

パラメータ

MATLAB program

```
m = 5.8 ;
M = 10.36 ;
X1 = 5e-3 ;
X2 = 12.3e-3 ;
R = 57 ;
L = 3.16;
I = 0.885
gg = 9.8
```

パラメータ	記号	値	単位
ビームの長さ	$2l$	3.8	m
質量	m	5.8	kg
質量	M	10.36	kg
定常ギャップ	X_1	5.0	mm
ビームのたわみ	X_2	12.3	mm
固有振動数	f_n	4.5	Hz
電磁石抵抗	R	57	Ω
電磁石インダクタンス	L	3.16	H
定常電流	I	0.885	A
重力加速度	g	9.8	$\mathrm{m/s^2}$

MATLAB program

```
k = 0.0034;
alpha = 2064;
beta = 0.327
```

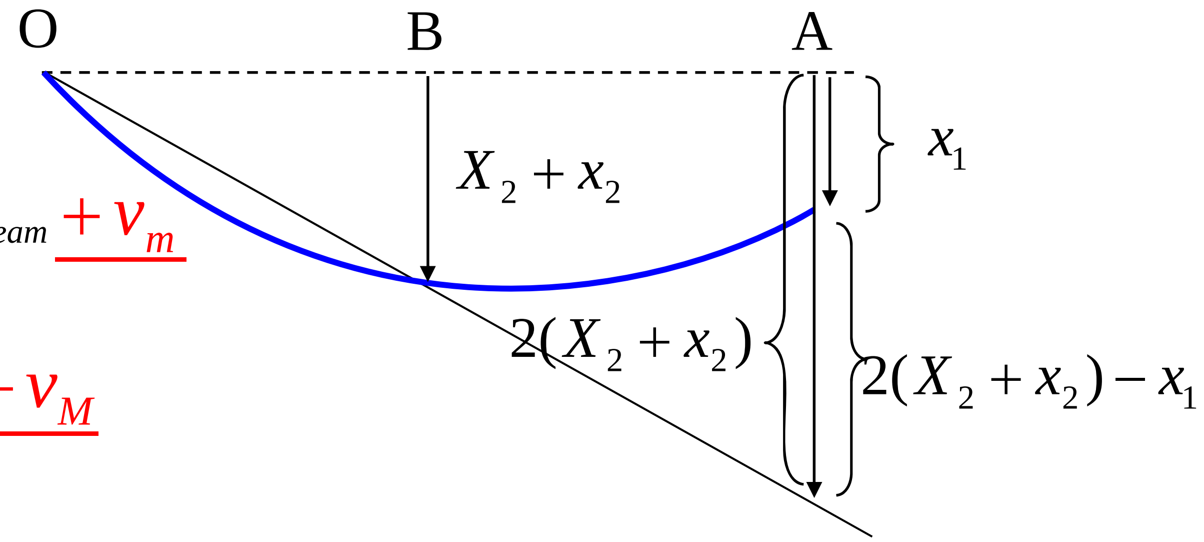
$k = 0.0034$ $[\mathrm{Nm^2 / A^2}]$

$\alpha = 2064$ $[\mathrm{N/m}]$

$\beta = 0.327$ $[\mathrm{Ns/m}]$

Ideal Mathematical Model

柔軟ビーム



$$m\frac{d^2 x_1}{dt^2} = mg - f_{mag} + f_{beam} \underline{+ v_m}$$

$$M\frac{d^2 x_2}{dt^2} = Mg - 2 f_{beam} \underline{+ v_M}$$

$$f_{mag} = k\left(\frac{I + i}{X_1 + x_1}\right)^2$$

$$f_{beam} = \alpha(2(X_2 + x_2) - x_1) + \beta\frac{d}{dt}(2(X_2 + x_2) - x_1)$$

電磁石

$$L\frac{di}{dt} + Ri = e \underline{+ v_L}$$

Reduced Mathematical Model

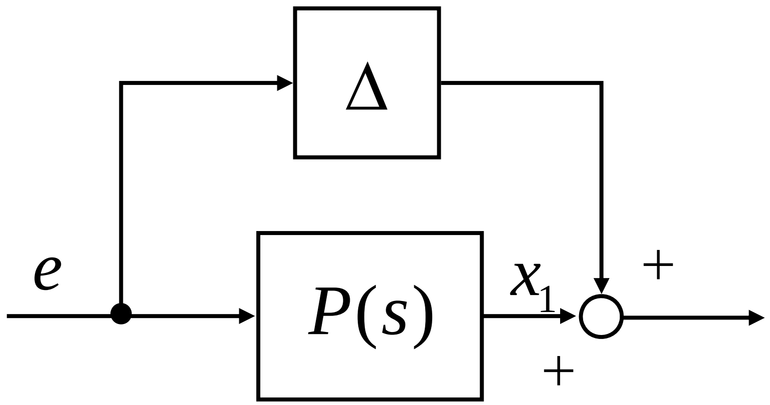
線形化

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \left(\frac{M+2m}{X_1}g - \alpha\right)x_1 + 2\alpha x_2 - \frac{(M+2m)g}{I}i - \beta\frac{dx_1}{dt} + 2\beta\frac{dx_2}{dt} \underline{+v_m}$$

$$M\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2\alpha x_1 - 4\alpha x_2 + 2\beta\frac{dx_1}{dt} - 4\beta\frac{dx_2}{dt} \underline{+v_M}$$

出力

$$y = x_1 \underline{+w_0}$$



状態空間表現

$$a := \frac{1}{m}\left(\frac{M+2m}{X_1}g - \alpha\right),\quad b := \frac{2\alpha}{m},\quad c := -\frac{M+2m}{mI}g,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u + D_g v_0 \\ y = C_p x_p + w_0 \end{cases}$$

$$d := \frac{2\alpha}{M},\quad f := -\frac{4\alpha}{M},\quad h := -\frac{R}{L},\quad j := \frac{1}{L}$$

$$x_p := [x_1 \quad x_2 \quad \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad i]^T \qquad u := e \qquad \underline{v_0 := [v_m \quad v_M \quad v_L]^T}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & -\beta/m & 2\beta/m & c \\ d & f & 2\beta/M & -4\beta/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix},\quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}$$

$$C_p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],\qquad \underline{D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/M & 0 \\ 0 & 0 & 1/L \end{bmatrix}}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7070 & 712 & -0.327 & 0.654 & -41.9 \\ 399 & -797 & 0.654 & -1.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18.0 \end{bmatrix}, \qquad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.317 \end{bmatrix}$$

$$C_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.172 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0965 & 0 \\ 0 & 0 & 0.317 \end{bmatrix}$$

MATLAB program

```
Ma = ( ( ( M+2*m )/X1 )*gg – alpha ) / m ;
Mb = 2*alpha / m ;
Mc = -( ( M+2*m ) / ( m*I ) )*gg ;
Md = 2*alpha / M ;
Mf = -4*alpha / M ;
Mh = -R / L ;
Mj = 1 / L ;

Ap = [ 0     0      1          0       0  ;
       0     0      0          1       0  ;
       Ma  Mb    -beta/m    2*beta/m   Mc ;
       Md  Mf   2*beta/M  -4*beta/M    0  ;
       0     0      0          0      Mh ]
Bp = [ 0; 0; 0; 0; Mj ]
Cp = [ 1  0  0  0  0 ]
```

```
Dp=[0     0     0;
    0     0     0;
    1/m   0     0;
    0    1/M    0;
    0     0   1/L];
```

可制御性，可観測性

$$CO = \begin{bmatrix} B_p & A_p B_p & A_p^2 B_p & A_p^3 B_p & A_p^4 B_p \end{bmatrix}$$

$$OB = \begin{bmatrix} C_p & C_p A_p & C_p A_p^2 & C_p A_p^3 & C_p A_p^4 \end{bmatrix}'$$

$$\mathrm{rank}(CO) = 5$$

$$\mathrm{rank}(OB) = 5$$

制御対象は，可制御，可観測である

MATLAB program

```
CO = ctrb(Ap,Bp);
CO_rank = rank(CO)
OB = obsv(Ap,Cp);
OB_rank = rank(OB)
```

伝達関数表現

$$P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$$

$$P(s) = \frac{-13.3(s + 0.0631 \pm j28.2)}{(s+84.3)\underline{(s-84.2)}(s+18.0)\underline{(s+0.0686\pm j28.9)}}$$

不安定極　　振動モード

5 次の線形時不変系（LTI システム）であり，不安定系・振動系

極

$$8.42\times 10,$$
$$-6.86\times 10^{-2} \pm j28.9\times 10$$
$$-1.80\times 10,$$
$$-8.43\times 10,$$

零点

$$-6.31\times 10^{-2} \pm j2.82\times 10$$

MATLAB program

```
P_sys = pck(Ap,Bp,Cp,Dp);
P_ss = ss ( Ap, Bp, Cp, Dp ) ;
zpk(P_ss)
P_pole = pole ( P_ss )
P_zero = zero ( P_ss )
```

* （枠内）MATLAB 6.5 用

MATLAB program

```
omega1=logspace(-3,3,150);
bode ( P_ss, omega1 ) ;
pzmap (P_ss)
```

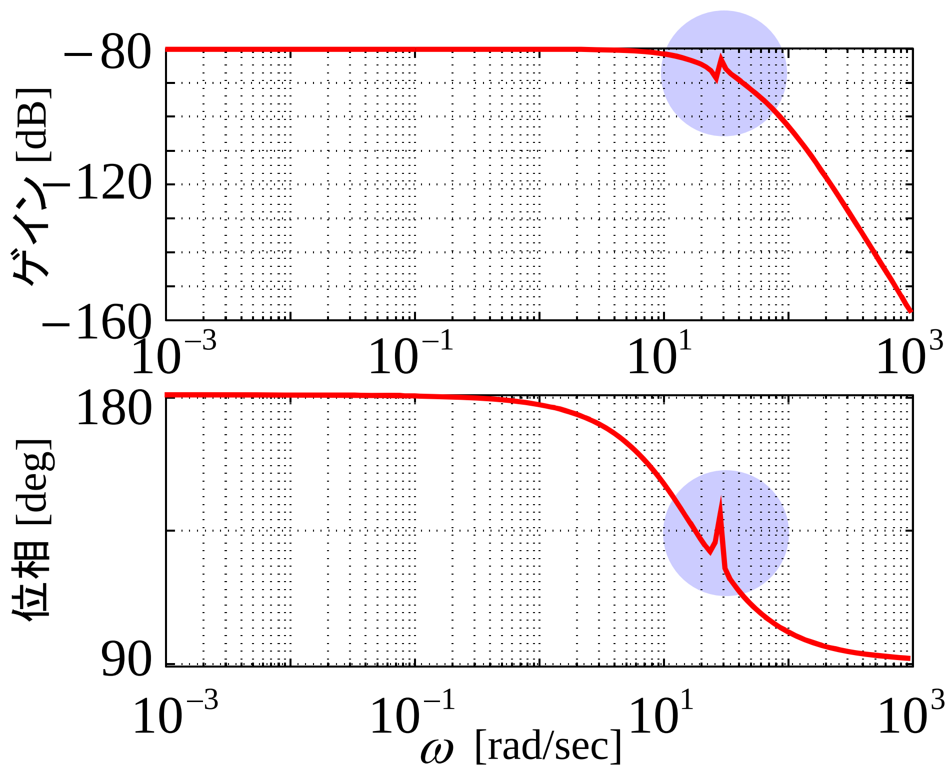


図6 プラント $P(s)$

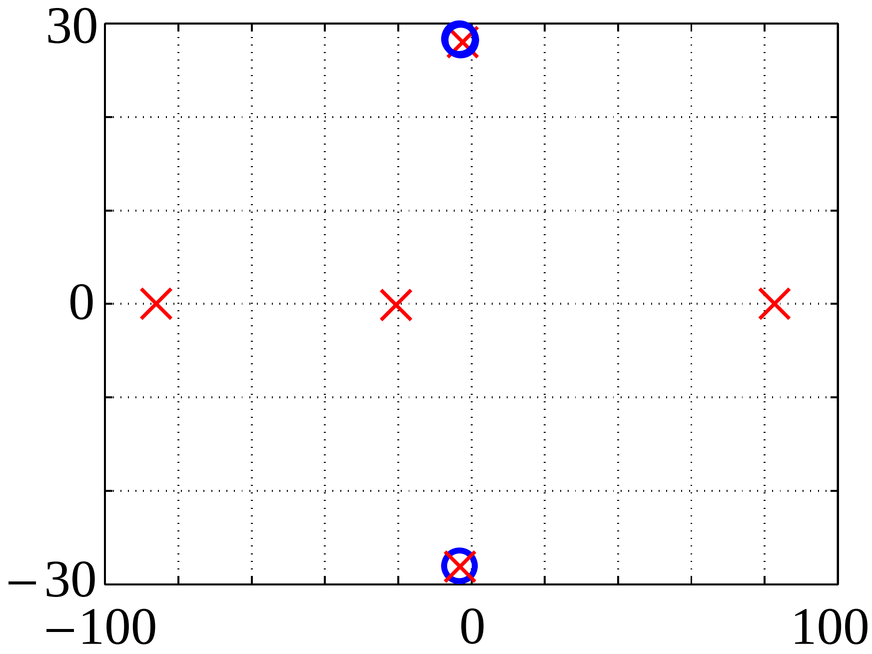


図7 プラント $P(s)$ の極・零点

H_∞ 制御

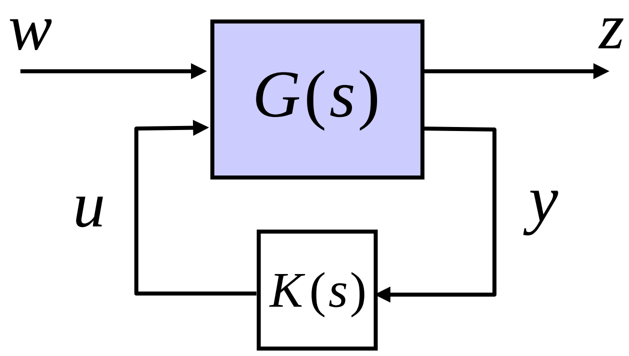


図8　一般化プラント

状態空間表現

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$
$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$
$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u$$

$w \rightarrow z$ への閉ループ伝達関数 $T_{zw}(s)$ の H_∞ノルム: $\| T_{zw}(s) \|_\infty$

[H_∞制御問題]

ある指定した $\gamma \in R$ に対して，閉ループ系を内部安定とし，かつ

$$\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$$

を満たすコントローラが存在するかどうか判定し，存在する場合はそのようなコントローラを求めよ．

最悪状態設計問題

$$v_0(s) = W_v(s)v(s)$$

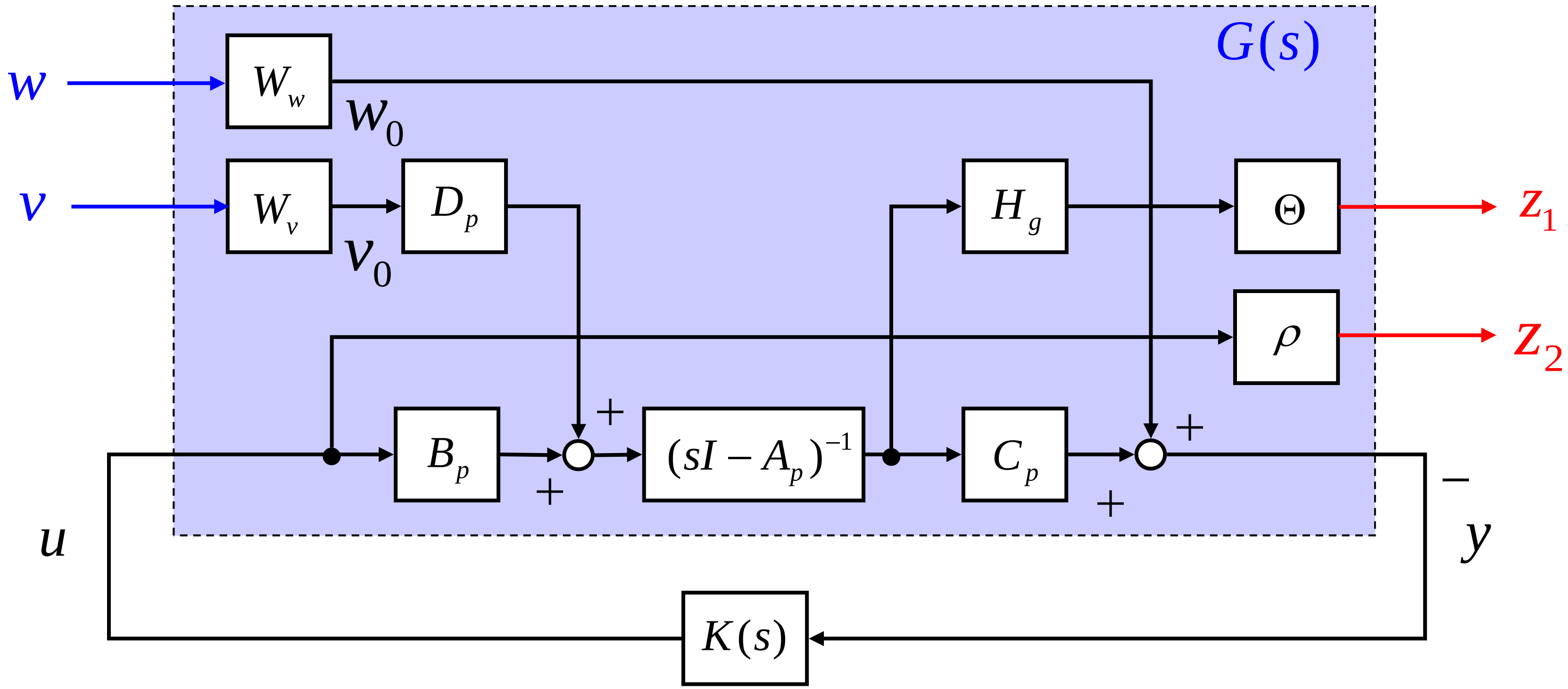
$$w_0(s) = W_w(s)w(s)$$

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta z_g \\ \rho u \end{bmatrix}$$

$$z_g := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = H_g x_p$$

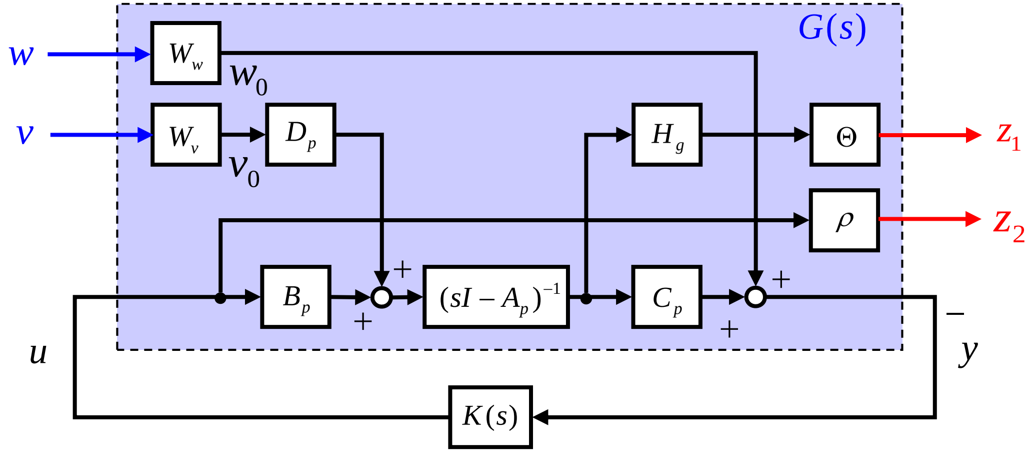
$$H_g := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Theta := \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 \end{bmatrix}$$



最悪状態設計問題

$$\left\| \begin{matrix} \Phi_{z1v}(s) & \Phi_{z1w}(s) \\ \Phi_{z2v}(s) & \Phi_{z2w}(s) \end{matrix} \right\|_\infty < \gamma$$



閉ループ伝達関数

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \Phi(s) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \qquad \Phi(s) := \begin{bmatrix} \Phi_{z1v}(s) & \Phi_{z1w}(s) \\ \Phi_{z2v}(s) & \Phi_{z2w}(s) \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{zv}(s) := \begin{bmatrix} \Phi_{z1v}(s) \\ \Phi_{z2v}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta H_g \\ -\rho K(s) C_p \end{bmatrix} \Psi(s)(I + B_p K(s) C_p \Psi(s))^{-1} D_p W_v(s)$$

$$\Phi_{zw}(s) := \begin{bmatrix} \Phi_{z1w}(s) \\ \Phi_{z2w}(s) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \Theta H_g \Psi(s) B_p \\ \rho I \end{bmatrix} K(s)(I + P(s)K(s))^{-1} W_w(s)$$

$$\Psi(s) := (sI - A_p)^{-1}$$

最悪状態設計問題の解釈

線形2次形式評価関数

$$J(u,d)=\int_0^\infty ((z_g^T Q z_g + u^T R u) - \gamma^2 d^T d)dt$$

$$d := \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad Q := \Theta^T \Theta \geq 0, \quad R := \rho^2 > 0$$

u :評価関数を最小化

d :評価関数を最大化

➡ 最悪外乱に対する最適制御

周波数重み $W_v(s)$

$$W_v(s) = w_v(s)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \qquad w_v(s) = \frac{k_v}{\left(1+\dfrac{s}{2\pi f_{v1}}\right)\left(1+\dfrac{s}{2\pi f_{v2}}\right)}$$

$$f_{v1} = 0.016, \quad f_{v2} = 0.5, \quad k_v = 9.76\times 10^3$$

MATLAB program

```
fv1=0.016;
fv2=0.5;
kv=9.76e3;
Wv1_tf = tf([1],[1/(2*pi*fv1) 1])
Wv2_tf = tf([1],[1/(2*pi*fv2) 1]);
Wv_tf = kv* wv1_tf * wv2_tf;
[Wv_tf_n,Wv_tf_d] = tfdata(Wv_tf,’v’);
Wv_sys = nd2sys(Wv_tf_n,Wv_tf_d);
Wv_k = [1 1 1]';
bodemag(wv_tf,omega1)
```

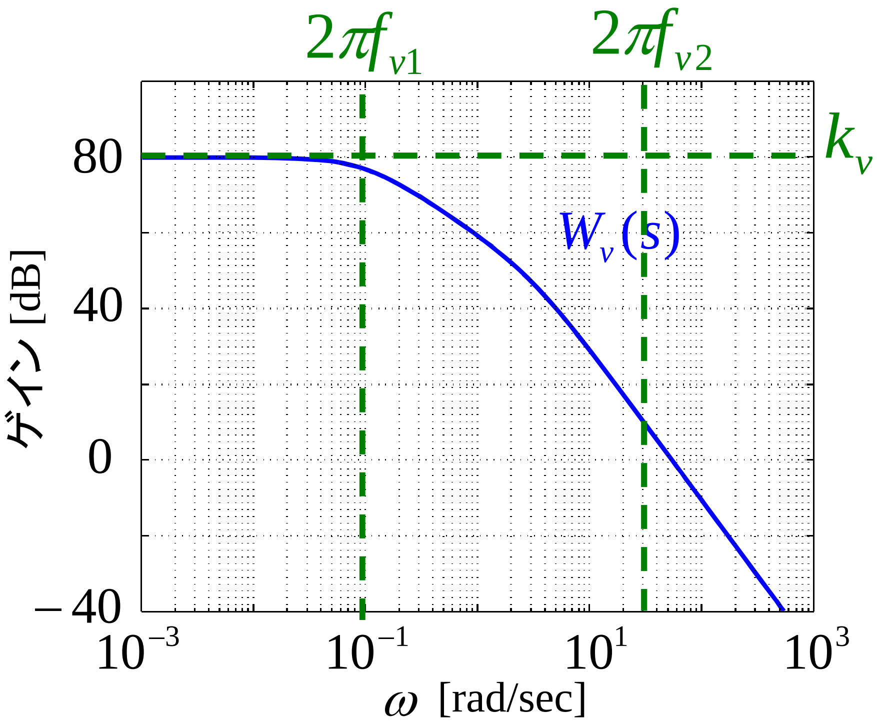


図 周波数重み $W_v(s)$

周波数重み$W_w(s)$

$$W_w(s)=\frac{k_w\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w1}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w2}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w6}}\right)}{\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w3}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w4}}\right)\left(1+\frac{s}{2\pi f_{w5}}\right)}$$

$f_{w1}=0.01,\ f_{w2}=0.05,\ f_{w3}=3.0,$
$f_{w4}=5.0,\ f_{w5}=8.0,\ f_{w6}=100$

MATLAB program

```
fw1=0.01; fw2=0.05; fw3=3.0;
fw4=5.0; fw5=8.0; fw6=100.0; kw=5.21e-7;
Ww1_tf = tf([1/(2*pi*fw1) 1],[1/(2*pi*fw3) 1]);
Ww2_tf = tf([1/(2*pi*fw2) 1],[1/(2*pi*fw4) 1]);
Ww3_tf = tf([1/(2*pi*fw6) 1],[1/(2*pi*fw5) 1]);
Ww_tf = Ww1_tf * Ww2_tf * Ww3_tf * kw;
[Wv_tf_n,Wv_tf_d] = tfdata(Wv_tf,'v');
Wv_sys = nd2sys(Wv_tf_n,Wv_tf_d);
bodemag(Ww_tf,omega1)
```

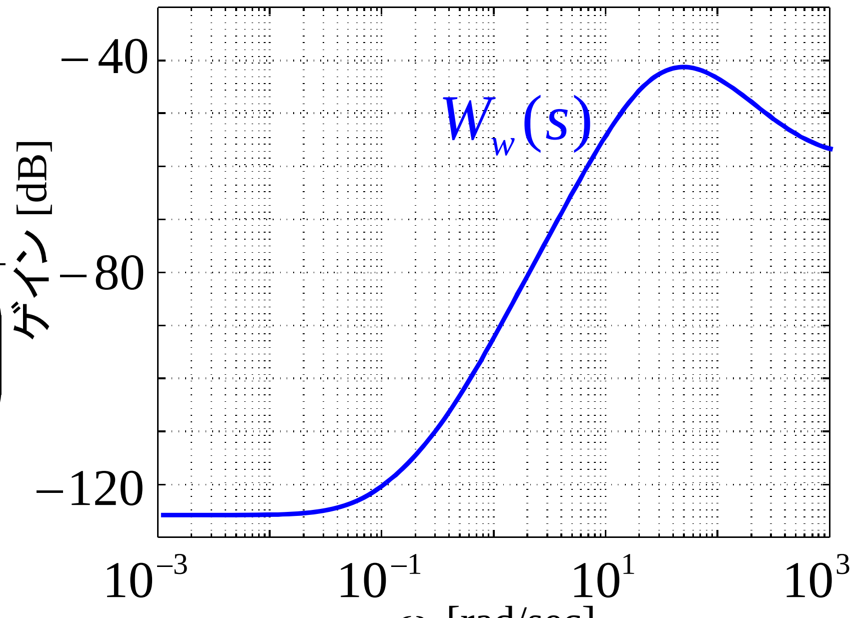


図 周波数特性 $W_w(s)$

重み係数 Θ

$$\Theta := \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1 = 66.0,$$
$$\theta_2 = 0.35,$$
$$\theta_3 = 0.91,$$
$$\theta_4 = 0.70,$$

重み係数 ρ

$$\rho = 8.0 \times 10^{-5}$$

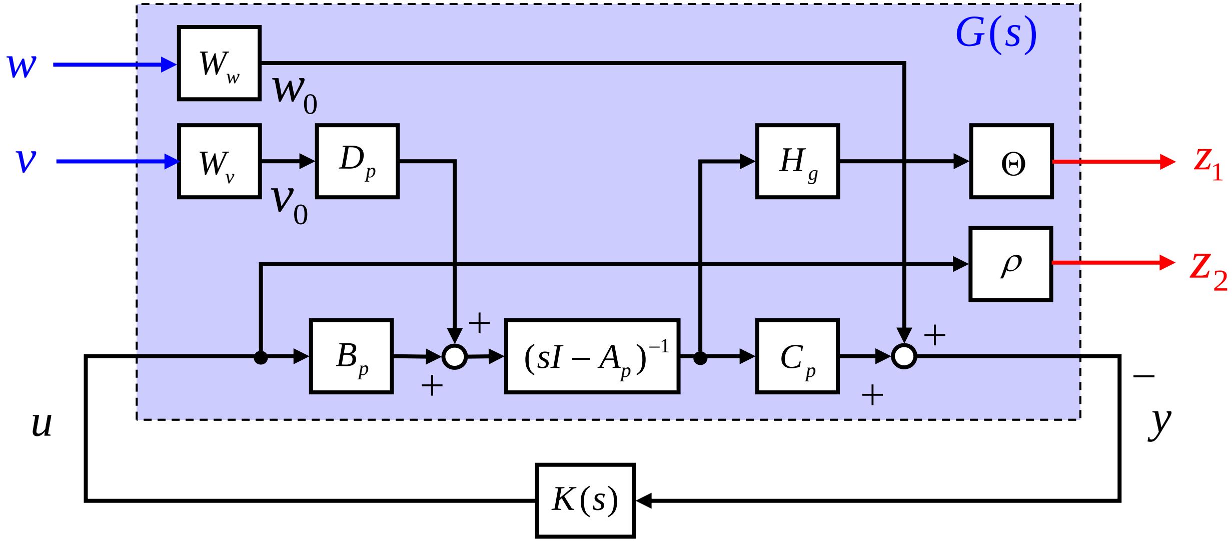
係数 H_g

$$H_g := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATLAB program

```
theta_1 = 66.0 ;
theta_2 = 0.35 ;
theta_3 = 0.91 ;
theta_4 = 0.70 ;
Theta = diag ( [ theta_1; theta_2; theta_3; theta_4] ) ;
rho = 8e-5 ;
Hg = [1 0 0 0 0; 0 1 0 0 0; 0 0 1 0 0; 0 0 0 1 0];
```

一般化プラント



MATLAB program

* MATLAB 7 用

```
Psi_ss = ss(Ap,eye(5),eye(5),zeros(5));
systemnames = 'Psi_ss Bp Cp Dp Wv_tf …
               Wv_k Ww_tf Hg Theta rho';
inputvar = '[ w; v; control ]';
outputvar = '[ Theta; rho; -Cp-Ww_tf]';
input_to_Psi_ss = '[ Bp + Dp ]';
input_to_Bp = '[ control ]';
input_to_Cp = '[ Psi_ss ]';
input_to_Dp = '[ Wv_k ]';
```

```
input_to_Wv_tf = '[ v ]';
input_to_Wv_k = '[ Wv_tf ]';
input_to_Ww_tf = '[ w ]';
input_to_Hg = '[ Psi_ss ]';
input_to_Theta = '[ Hg ]';
input_to_rho = '[ control ]';
G_ss = sysic;
minfo(G_ss)
```

MATLAB program

```
Psi_sys = pck(Ag,eye(5),eye(5),zeros(5));
systemnames = 'Psi_sys Bp Cp Dp Wv_sys …
                    Wv_k Ww_sys Hg Theta rho';
inputvar = '[ w; v; control ]';
outputvar = '[ Theta; rho; -Cp-Ww_sys]';
input_to_Psi_sys = '[ Bp + Dp ]';
input_to_Bp = '[ control ]';
input_to_Cp = '[ Psi_sys ]';
input_to_Dp = '[ Wv_k ]';
input_to_Wv_sys = '[ v ]';
input_to_Wv_k = '[Wv_sys ]';
input_to_Ww_tf = '[ w ]';
input_to_Hg = '[ Psi_sys ]';
input_to_Theta = '[ Hg ]';
input_to_rho = '[ control ]';
sysoutname = 'G_sys';
cleanupsysic = 'yes';
sysic;
```

コントローラ $K(s)$

$$K(s)=\frac{-3.72\times10^{10}(s+84.42)(s+50.27)(s+31.42)(s+18.85)(s+18.01)}{(s+3732)(s+14.75)(s+3.314)(s+0.007571)}$$

$$\times\frac{(s+0.689\pm j28.9)(s+2.40\pm j2.17)}{(s+616\pm j479)(s+53.1\pm j31.0)(s+0.412\pm j29.3)}$$

安定

極

$-3732,$

$-14.75,$

$-3.314,$

$-0.007571,$

$-616\pm j479,$

$-53.1\pm j31.0,$

$-0.412\pm j29.3$

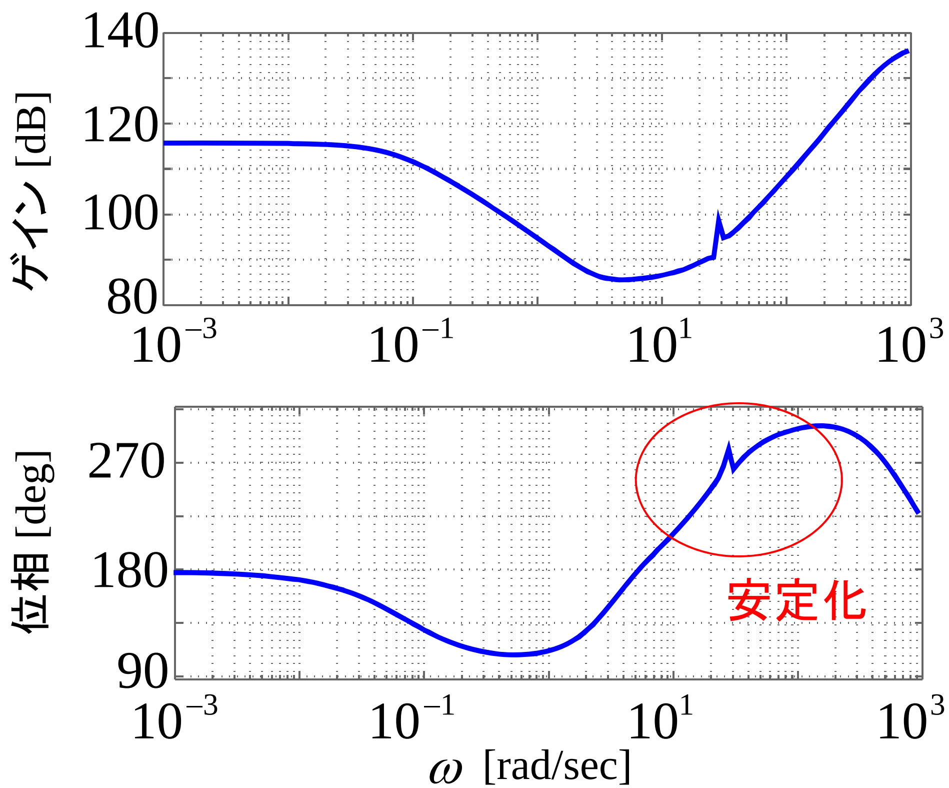


図 コントローラ $K(s)$

MATLAB program

```
[K_ss,Cloop_ss,gam] = hinfsyn(G_ss,1,1,'gmax',1,'gmin',1);

[K_sys,Cloop_sys,gam] = hinfsyn(G,1,1,1.0,1.0,0.01)
[K_A,K_B,K_C,K_D] = unpck(K_sys);
K_ss = ss(K_A,K_B,K_C,K_D);

zpk(K_ss)
[K_pole,K_zero] = pzmap(K_ss);
bode(K_ss,omega1)
```

開ループ伝達関数

ゲイン余裕　1.59　[dB]
位相余裕　37.6　[deg]
ゲイン交差周波数　25.9 [rad / sec]
位相交差周波数　9.25 [rad / sec]

MATLAB program

```
L_ss =P_ss*K_ss;
bode(L_ss,omega1);
[ Gm, Pm, Wgc, Wcp ] …
                    = margin( L_ss );
Gm = 20*log10(Gm);
```

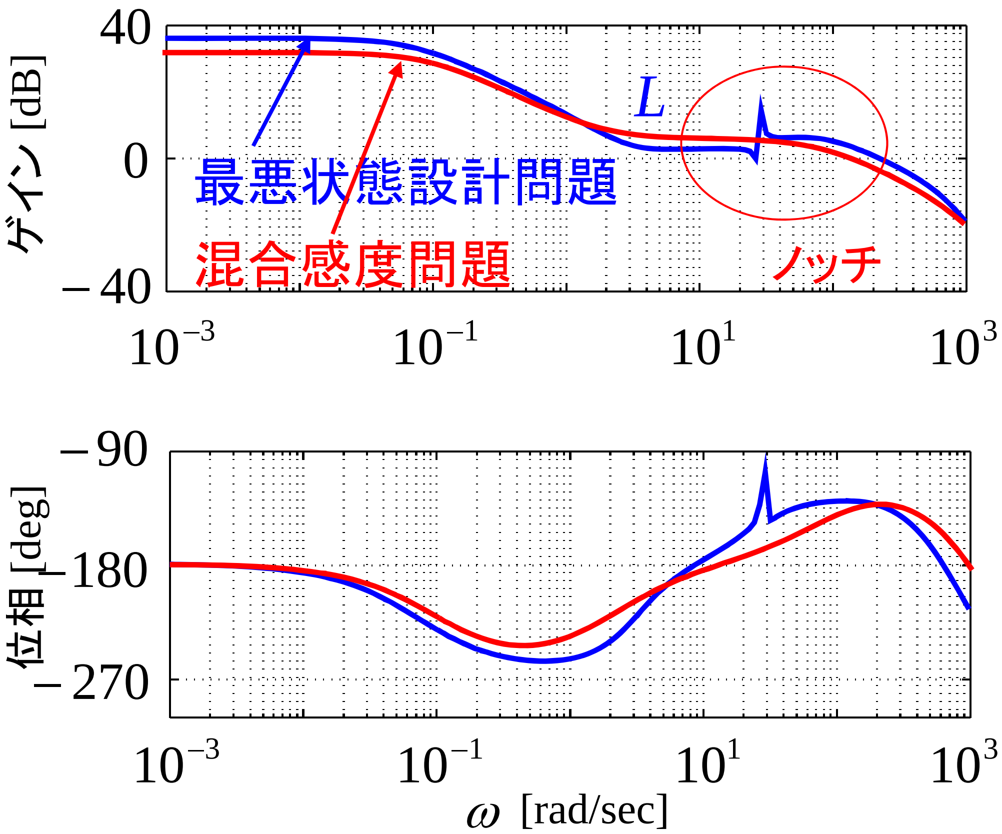


図　開ループ伝達関数

MATLAB program

```
nyquist ( L_ss )
```

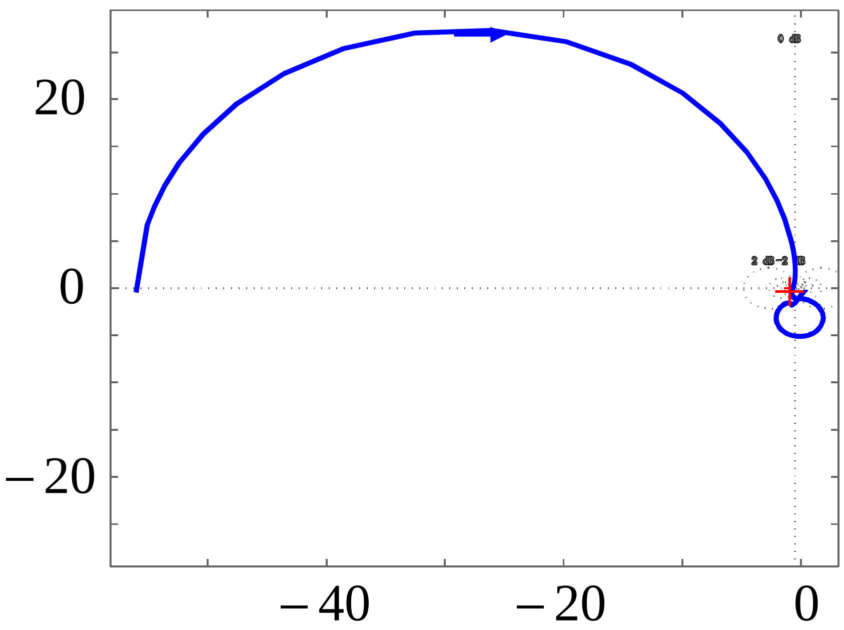


図　ベクトル軌跡

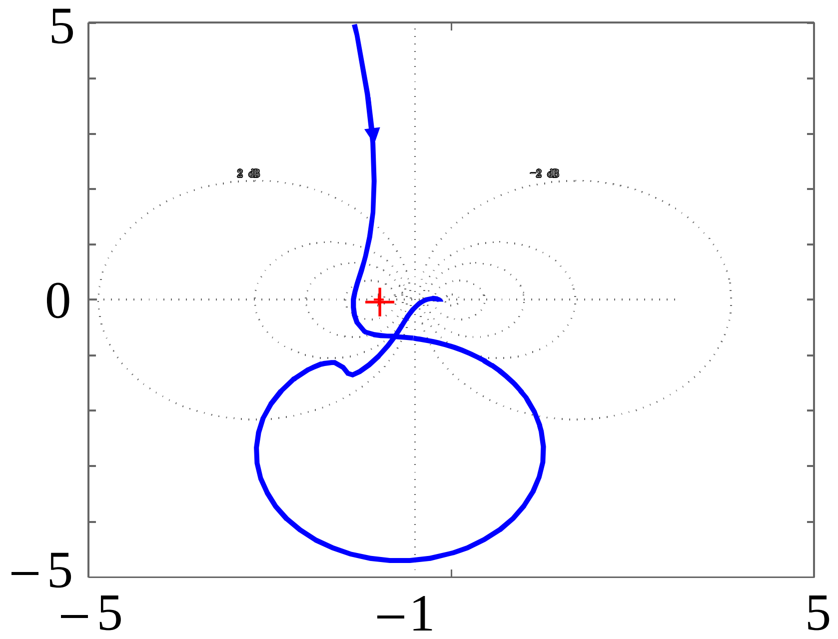


図　ベクトル軌跡

閉ループ系の特性

極

$$-3.72\times10^{3},\quad -6.28\times10^{2},$$
$$-2.79\times10^{2}\pm j2.71\times10^{2},$$
$$-8.44\times10^{1},\quad -7.24\times10^{1},$$
$$-6.92\times10^{-1}\pm j2.89\times10^{1},$$
$$-2.08\pm j2.82\times10^{1},\ -3.52\pm j8.13,\ -8.07\pm j3.18,$$
$$-5.03\times10,\ -1.80\times10,\ -3.14\times10,\ -1.01\times10^{-1},\ -3.14,\ -1.89\times10^{1},$$

MATLAB program

```
T = feedback( L_ss,1 );
close_p = pole( T )
close_z = zero( T )
pzmap( T )
```

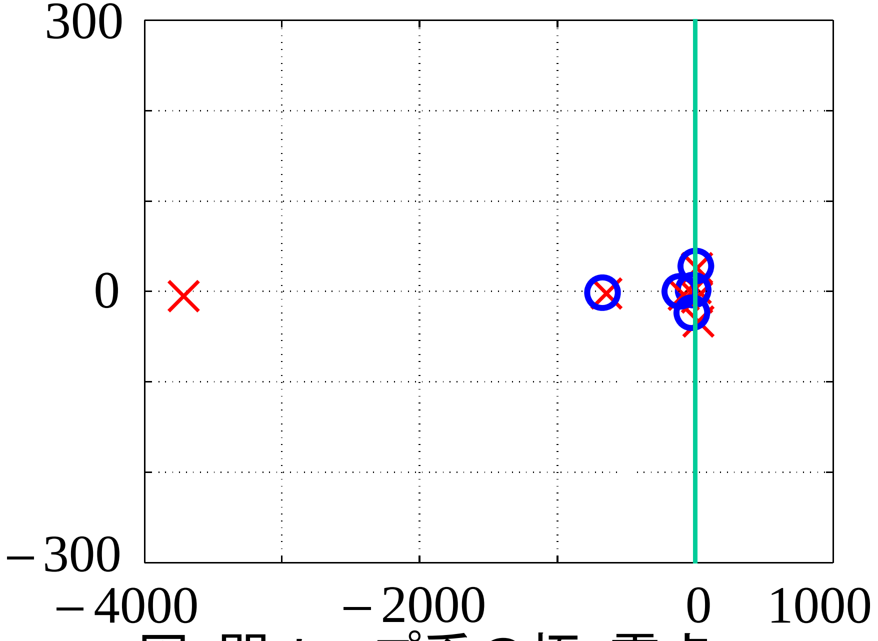


図　閉ループ系の極・零点

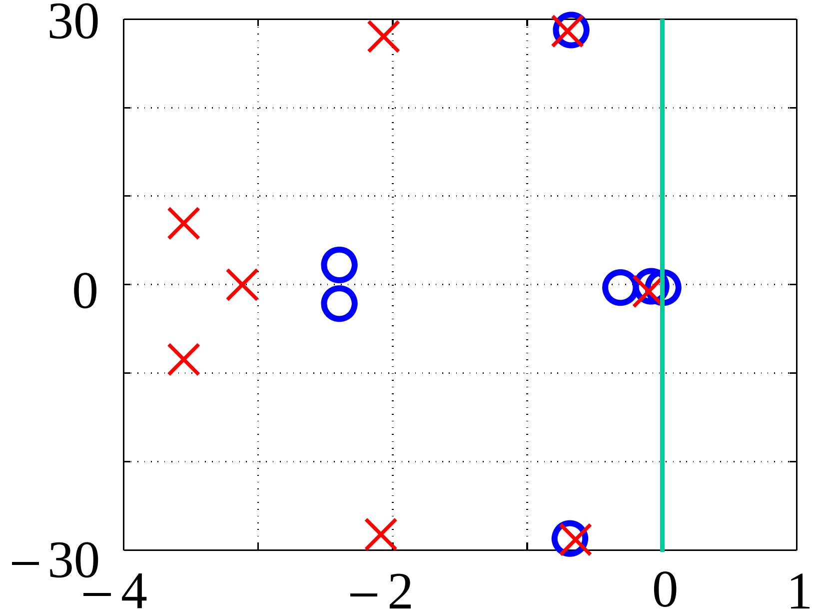


図　閉ループ系の極・零点(拡大図)

閉ループ系の特性

MATLAB program

```
[Cloop_A,Cloop_B,Cloop_C,
      Cloop_D] = unpck(Cloop_sys);
Cloop_ss = ss(Cloop_A,Cloop_B,
                  Cloop_C,Cloop_D);
nom_perf_ss =  Cloop_ss(1:5,1);
nom_perf_sv = sigma(nom_perf_ss, omega1);
rob_stab_ss =  Cloop_ss(1:5,2);
Rob_stab_sv = sigma(rob_stab_ss,
                              omega1);
semilogx(omega1,nom_perf_sv)
hold on
semilogx(omega1,rob_stab_sv)
figure
sigma(Cloop_ss,omega1);
```

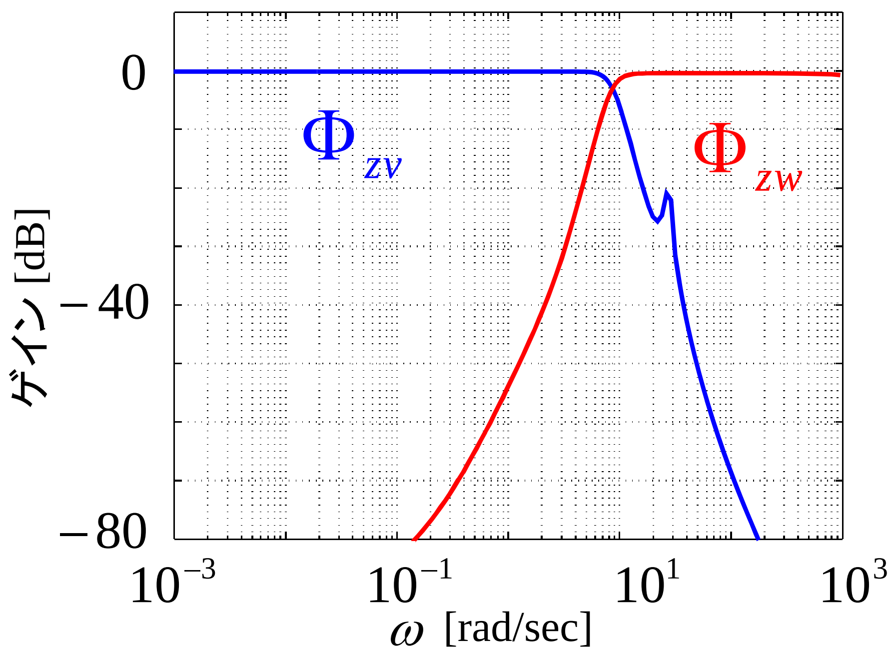


図 閉ループ系の周波数特性 Φ_{zv}, Φ_{zw}

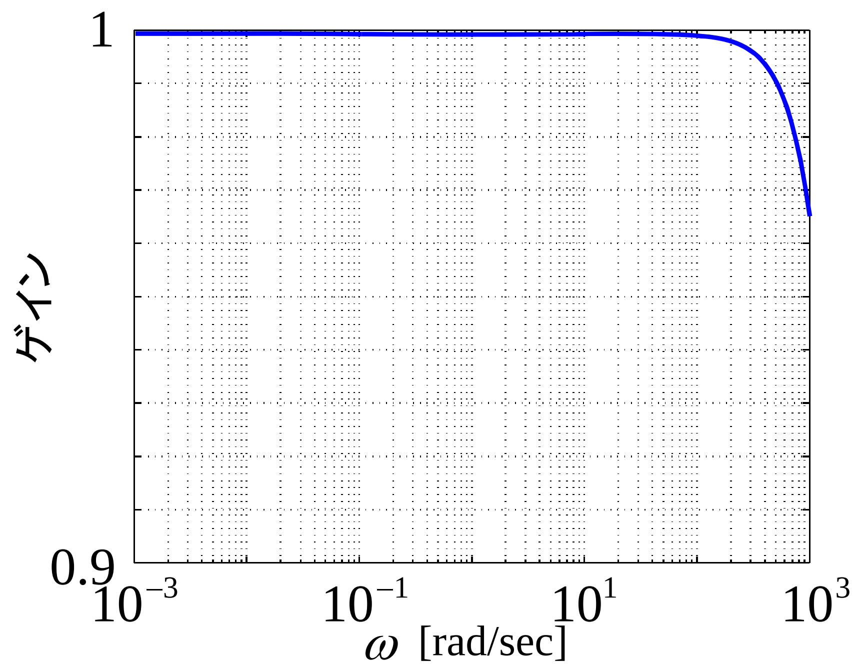


図 閉ループ系の周波数特性 $\bar{\sigma}(\Phi)$

外乱が状態変数に与える影響

$$R(s) := \Psi(s)(I + B_g K(s) C_g \Psi(s))^{-1} D_g$$

➡ 低周波数帯域で小さい

$$\Phi_{zv}(s) := \begin{bmatrix} \Phi_{z1v}(s) \\ \Phi_{z2v}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta H_g \\ -\rho K(s) C_g \end{bmatrix} \Psi(s)(I + B_g K(s) C_g \Psi(s))^{-1} D_g W_v(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \Theta H_g \\ -\rho K(s) C_g \end{bmatrix} R(s) W_v(s)$$

加法的な変動に対するロバスト安定性の指標

$$Q(s) := K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$$

➡ 不確かさの大きい周波数帯域で小さい

$$\Phi_{zw}(s) := \begin{bmatrix} \Phi_{z1w}(s) \\ \Phi_{z2w}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta H_g \Psi(s) B_g \\ \rho I \end{bmatrix} K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} W_w(s)$$

$$= \begin{bmatrix} \Theta H_g \Psi(s) B_g \\ \rho I \end{bmatrix} Q(s) W_w(s)$$

ロバスト安定性 $\dfrac{K}{I+PK}$

MATLAB program

```
S_ss = feedback(1,L_ss);
T_ss = S_ss * K_ss;
bodemag(T_ss,omega1)
```

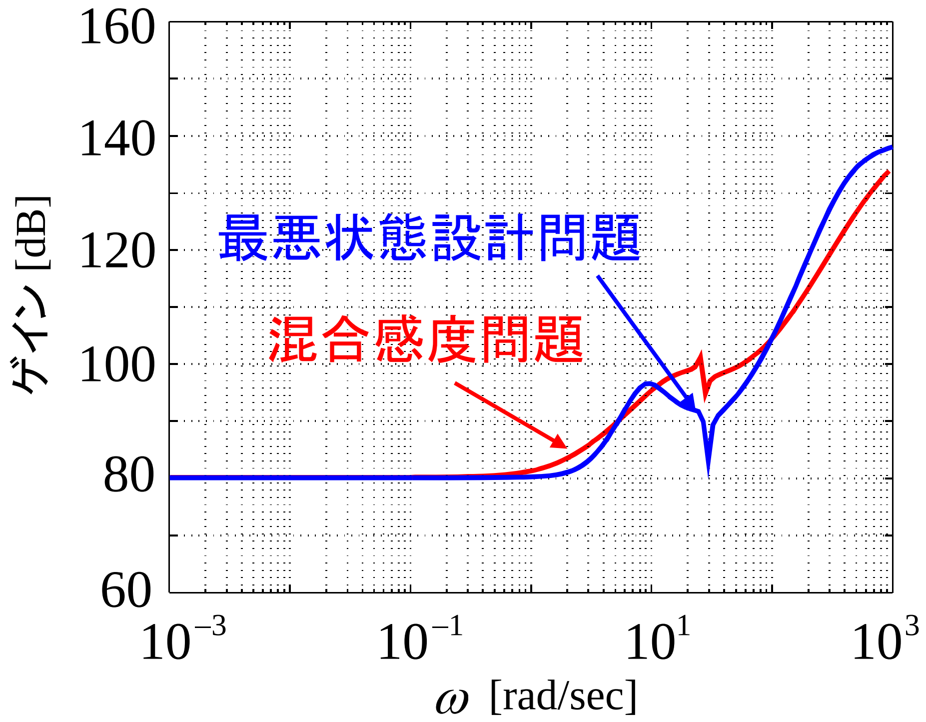


図 ロバスト安定性

実験結果

外乱応答

約 21 [N] に相当する電圧 (定常吸引力　約 100 [N])

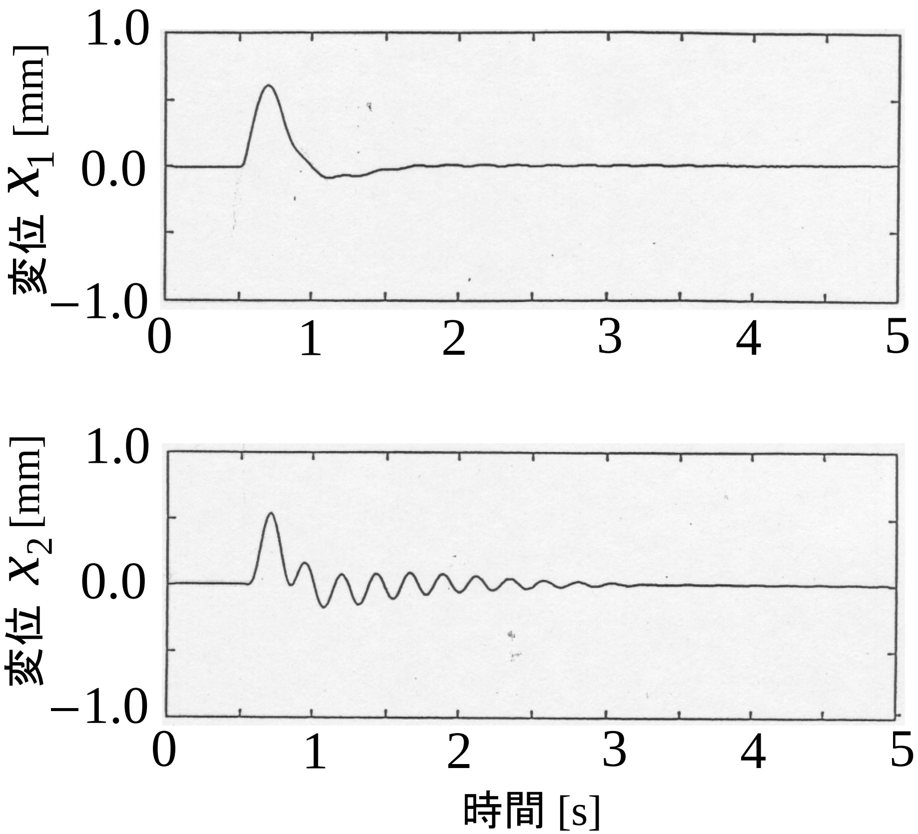


図　ステップ状外乱に対する時間応答
最悪状態設計問題：変動なし

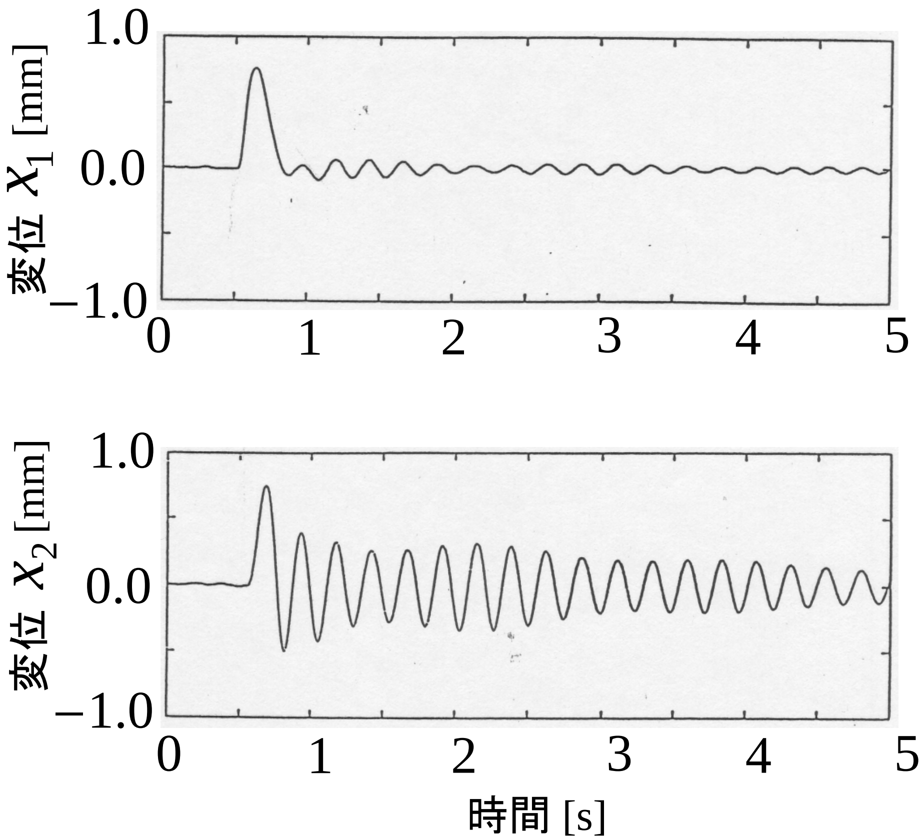


図　ステップ状外乱に対する時間応答
混合感度問題：変動なし

(1) ビーム中央部の質量 M を10.36 [kg]から 9.63[kg] にする.

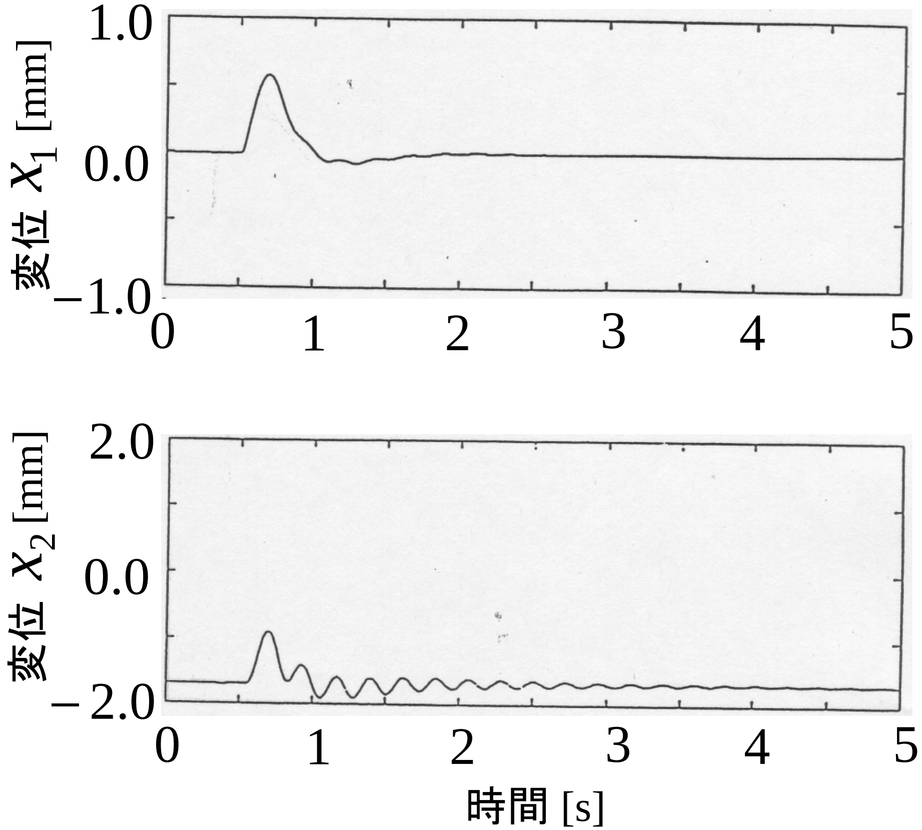


図 ステップ状外乱に対する時間応答
最悪状態設計問題: $M = 9.63$ [kg]

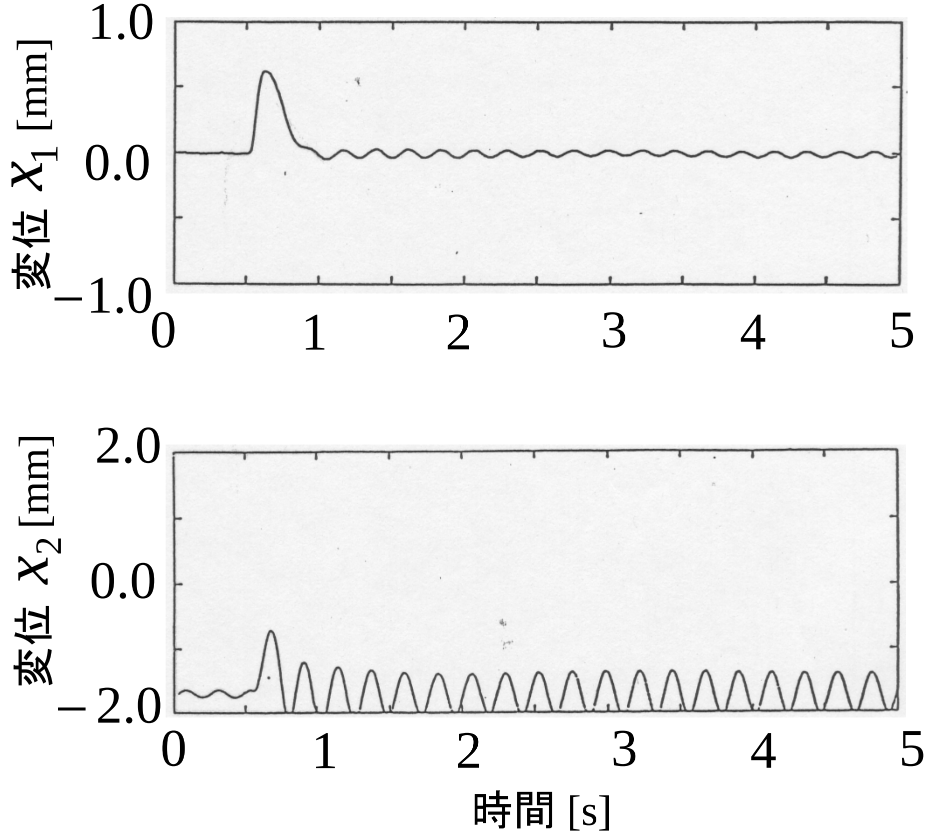


図 ステップ状外乱に対する時間応答
混合感度問題: $M = 9.63$ [kg]

(2) ビーム中央部の質量 M を 10.36 [kg] から 8.06 [kg] にする.

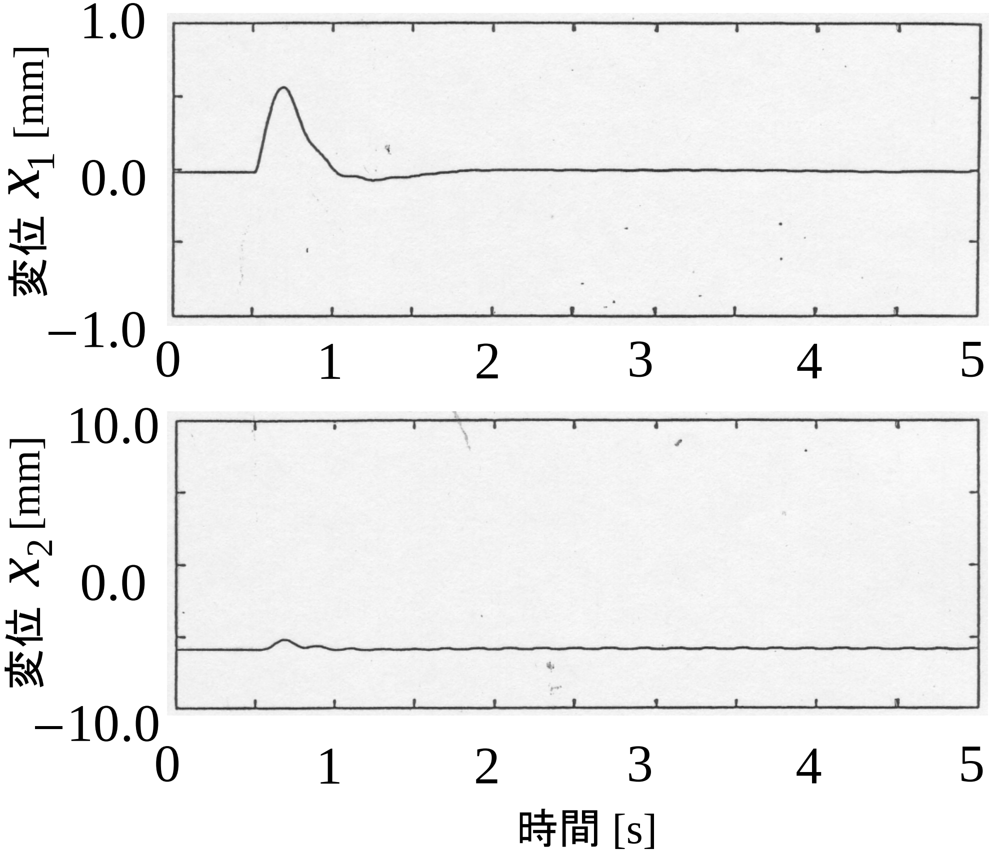


図 ステップ状外乱に対する時間応答
最悪状態設計問題: $M = 8.06$ [kg]

(3) ビーム中央部の質量 M を 10.36 [kg] から 11.51[kg] にする.

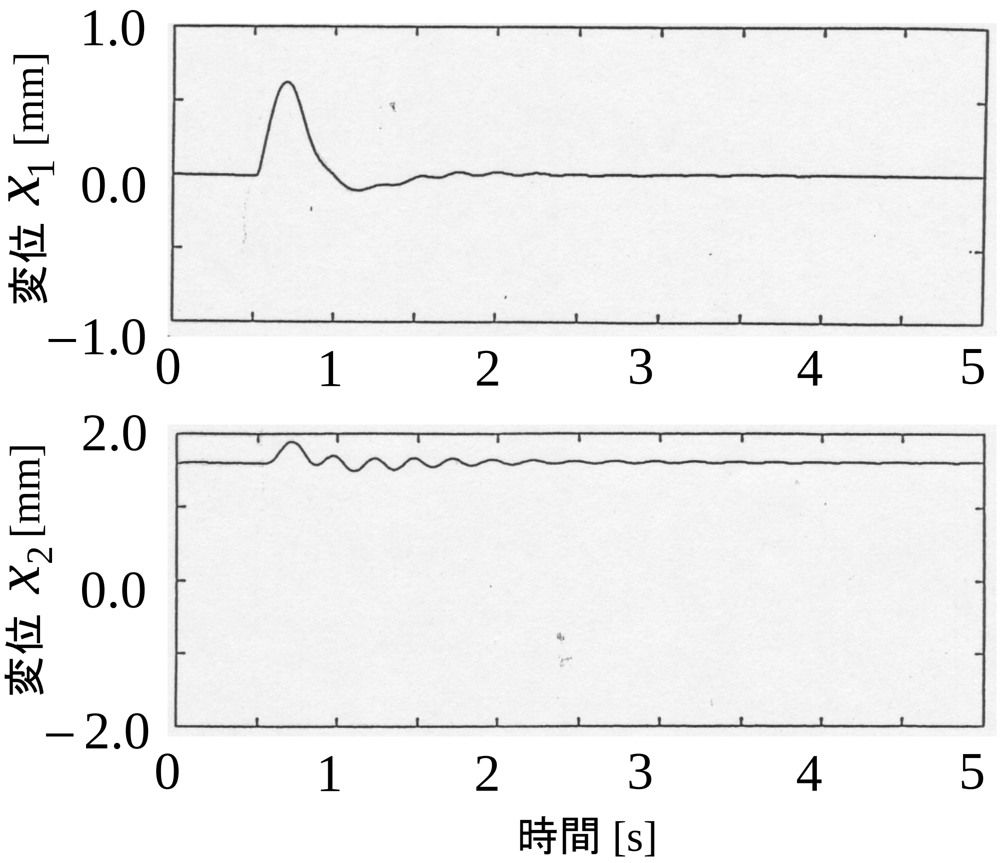


図　ステップ状外乱に対する時間応答

最悪状態設計問題 : $M = 11.51$ [kg]

(4) 電磁石側の質量 m を 5.80 [kg]から6.82 [kg] にする.

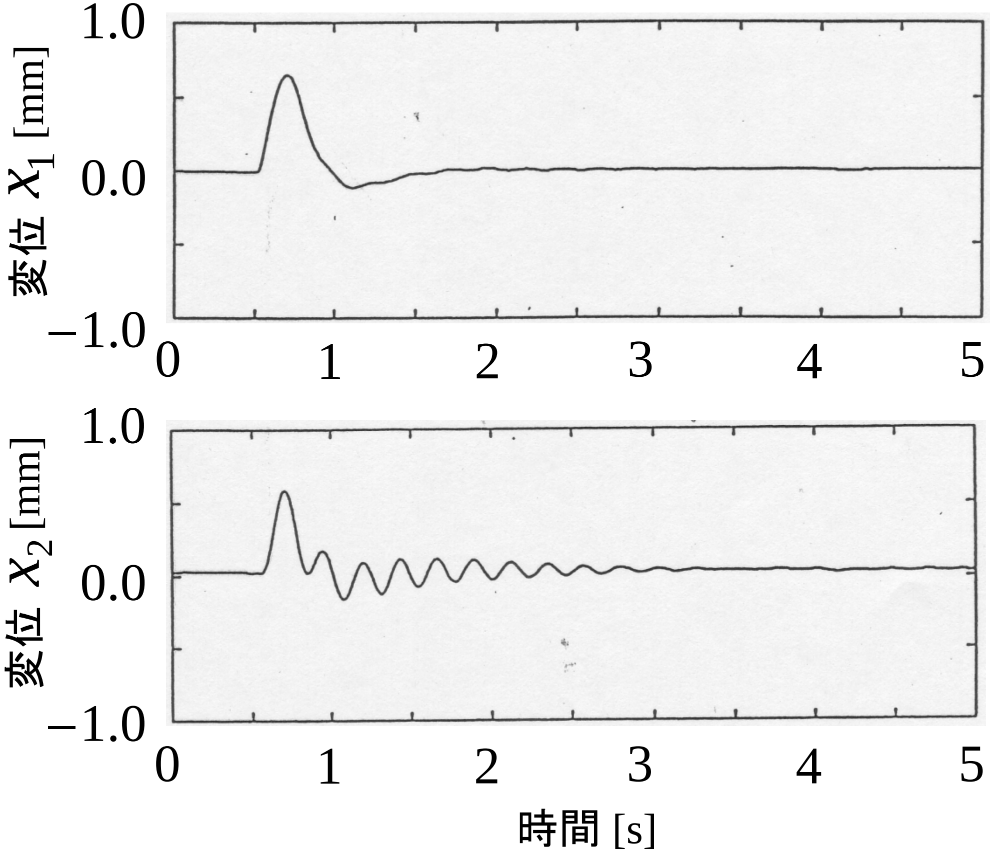


図 ステップ状外乱に対する時間応答
最悪状態設計問題: $m = 6.82$ [kg]

（5）電磁石部の抵抗 R を 57.0 [Ω] から 62.0 [Ω] にする.

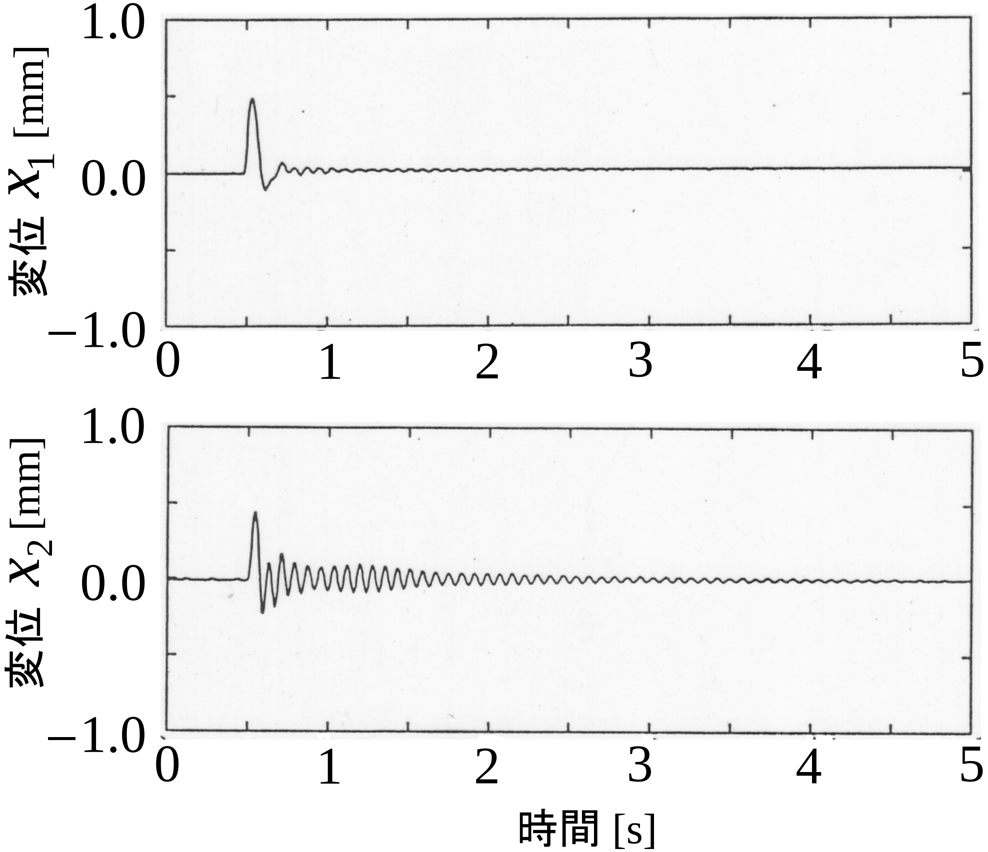


図 ステップ状外乱に対する時間応答
最悪状態設計問題: $R = 62.0\,[\Omega]$